Instytut Mechaniki i Inżynierii Obliczeniowej
Wydział Mechaniczny Technologiczny
Politechnika Śląska

LABORATORIUM
WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Badanie prętów na wyboczenie

1. CEL ĆWICZENIA

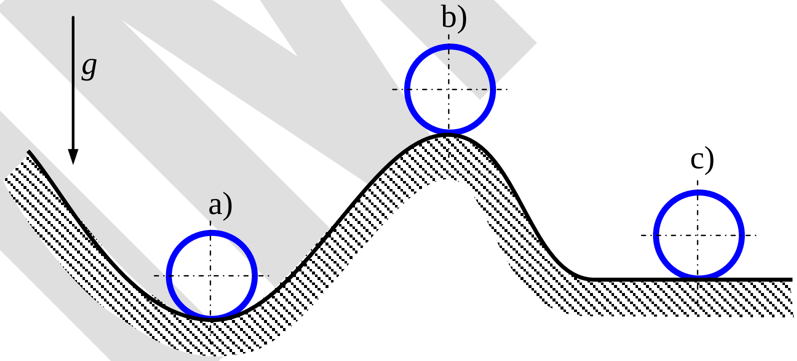
- Doświadczalne wyznaczenie zależności strzałki ugięcia pręta wyboczonego od wielkości przyłożonej siły P i przedstawienie jej na wykresie.
- Wyznaczenie wartości siły krytycznej P_{kr}^{d} dla danego pręta korzystając z danych doświadczalnych przy różnych sposobach mocowania pręta.
- Obliczenie modułu Younga E na podstawie wyników doświadczalnych i porównania tej wartości z danymi z tablic materiałowych.
- Obliczenie siły krytycznej P_{kr} ze wzoru Eulera.
- Obliczenie błędu względnego pomiarów.

2. WPROWADZENIE

Równowaga ciał może być stateczna, niestateczna lub obojętna. *Równowagą stateczną* (stałą, stabilną, trwałą) nazywamy taką formę równowagi, w której ciało wychylone z położenia pierwotnego z powrotem do niego powraca (rys. 1a). Inaczej mówiąc, ruch ciała jest taki, że wychylenia dowolnego punktu ciała są nie większe od początkowych.

O *równowadze niestatecznej* (chwiejnej) mówimy wówczas, gdy ciało wychylone z położenia pierwotnego nie powraca do tego położenia, ale przechodzi do innego (rys. 1b).

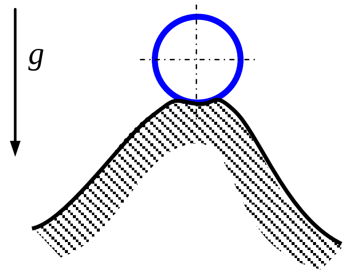
Jeśli ciało znajduje się w potencjalnym polu sił, wówczas położeniu równowagi statecznej odpowiada minimum energii potencjalnej, zaś równowadze niestatecznej odpowiada maksimum energii potencjalnej. Szczególny przypadek, gdy przy dowolnie małym wychyleniu wartość energii potencjalnej nie zmienia się, nazywamy *równowagą obojętną* (rys. 1c).



Rys. 1. Rodzaje równowagi ciała: a) stateczna; b) niestateczna; c) obojętna

Żadne ciało praktycznie nie może pozostawać w położeniu równowagi niestatecznej, będącej stanem granicznym. Ciało przechodzi do innego możliwego położenia. Przejście to może charakteryzować się dużymi przemieszczeniami, powstaniem plastycznych odkształceń, zniszczeniem układu itp. Taką formę przejścia z jednego położenia równowagi do drugiego nazywamy *utratą stateczności*.

W praktyce często mamy do czynienia ze zjawiskiem, gdy do przeprowadzenia układu w stan równowagi chwiejnej potrzebna jest na tyle mała ilość energii, że w danych warunkach może ona być dostarczona zupełnie przypadkowo (rys. 2). Wówczas mówi się, że stateczność układu jest niewystarczająca.



Rys. 2. Układ o małej stateczności

Stateczność układu może zależeć nie tylko od jego geometrycznej postaci, ale i od wielkości działających sił. Jeśli np. siła obciążająca układ będzie mniejsza od pewnej charakterystycznej wartości, to stateczność będzie zachowana; przy sile większej układ znajdzie się w położeniu równowagi niestatecznej. Przejście siły przez tę szczególną wartość powoduje zmianę równowagi układu ze statecznej na niestateczną. Tę charakterystyczną wartość siły obciążającej określamy mianem *siły krytycznej*.

Obecnie w wielu konstrukcjach zasadniczymi elementami decydującymi o ich wytrzymałości są pręty ściskane siłami osiowymi, dlatego też zagadnienie wyboczenia pręta stanowi ważną część obliczeń inżynierskich. Wyboczenie niekoniecznie musi prowadzić do zniszczenia pręta, ale utrata stateczności najczęściej prowadzi do utraty nośności całej konstrukcji. Ponadto w praktyce nie przeprowadza się analizy stanu równowagi układu po utracie stateczności i uważa się obciążenie krytyczne za szczególnie niebezpieczne. Niebezpieczeństwo utraty stateczności jest tym większe, im konstrukcja jest lżejsza.

Zagadnienie to jest o tyle istotne i ważne, że utrata stateczności następuje nagle, bez widocznych objawów poprzedzających „niebezpieczny” stan konstrukcji. Dlatego przedstawienie eksperymentalnego sposobu określenia siły krytycznej przy wyboczeniu sprężystym i porównanie z wynikiem uzyskanym analitycznie (wzór Eulera) pozwala na szersze rozeznanie w zagadnieniach stateczności prętów ściskanych.

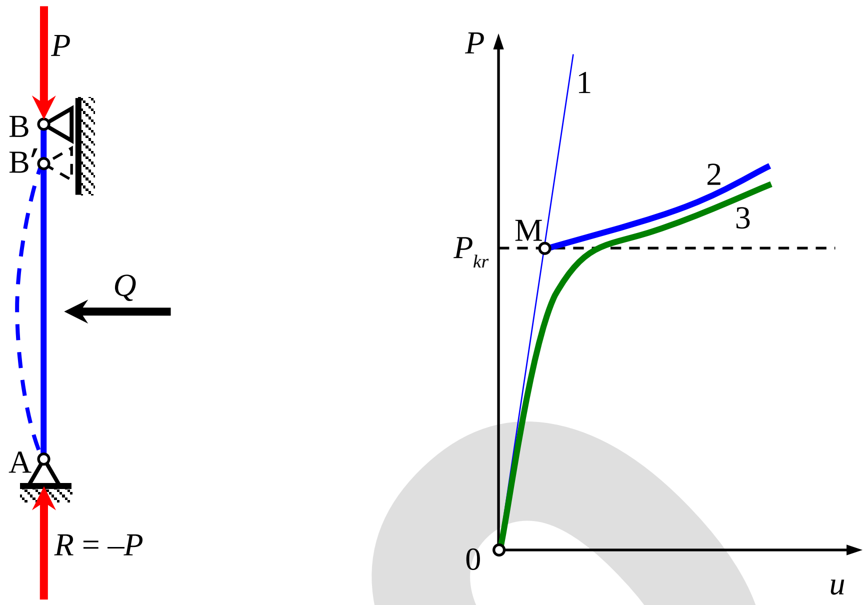
3. PODSTAWY TEORETYCZNE

3.1 Utrata stateczności prętów ściskanych

W przeciwieństwie do układów sztywnych w układach odkształcalnych wartości występujących sił mają wpływ na rodzaj równowagi.

Rozpatrywany jest nieważki pręt AB ściskany siłą osiową P (rys. 3a) na tyle małą, że oś pręta pozostaje prosta. Jeśli na pręt zadziała się statycznie siłą Q prostopadłą do osi pręta, to siła ta spowoduje ugięcie pręta. Po cofnięciu siły Q pręt powraca do swej początkowej (prostej) postaci. Jeśli działanie siłą Q będzie działaniem dynamicznym, wówczas wywoła ona drgania pręta wokół prostej osi. Zwiększenie wartości siły P powoduje początkowo jedynie wzrost okresu drgań. Jednakże po przekroczeniu pewnej charakterystycznej wartości siły P, zwanej *siłą krytyczną* P_{kr}, pręt po chwilowym zadziałaniu siły Q nie powróci do swej pierwotnej postaci. Po przekroczeniu przez siłę P wartości krytycznej pręt znajdzie się w równowadze chwiejnej i gwałtownie przybierze nową postać równowagi stałej o osi wygiętej. Towarzyszy temu nagły wzrost przemieszczeń końca B pręta.

Wygięcie pręta spowodowane przekroczeniem przez siłę ściskającą P wartości krytycznej P_{kr} nazywamy *wyboczeniem*.



a) b)

Rys. 3. a) Nieważki pręt ściskany osiowo; b) zależność *u-P*

Rysunek 3b przedstawia zależność pomiędzy przemieszczeniem *u* końca B pręta AB a wartością siły ściskającej *P*. Prosta 1 odpowiada sytuacji, gdy pręt prosty jest wyłącznie ściskany. Po osiągnięciu przez siłę *P* wartości krytycznej charakterystyka rozdwaja się w punkcie M. Punkt ten zwany jest *punktem bifurkacji* (rozdwojenia). Zwiększenie wartości siły ściskającej powyżej wartości P_{kr} spowoduje bądź równowagę niestateczną pręta, który pozostanie nadal prosty (prosta 1), bądź równowagę stateczną – pręt o osi wygiętej (krzywa 2). Linia 0-M-2 zwana jest *ścieżką równowagi*.

Założenie całkowicie osiowego ściskania jest oczywiście idealizacją – w praktyce zawsze ma się do czynienia z pewnym mimośrodem. Krzywa 3 na wykresie jest wykresem zależności *u-P* przy założeniu istnienia małego początkowego mimośrodu. Im mimośród jest mniejszy, tym krzywa początkowo dokładniej pokrywa się z prostą 1, by później ulec gwałtowniejszemu zakrzywieniu (gwałtowniejszy wzrost przemieszczeń).

3.2 Sprężyste wyboczenie pręta

Wyboczeniem sprężystym nazywać będziemy taki przypadek utraty stateczności, w którym siła krytyczna spowoduje powstanie naprężeń normalnych mniejszych od granicy proporcjonalności R_H.

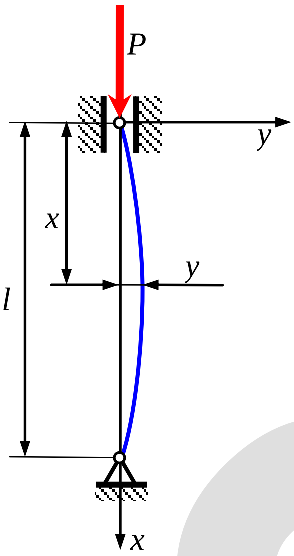
Podstawy teoretyczne sprężystego wyboczenia prętów prostych dał Euler wyprowadzając wzór na siłę krytyczną (wyboczeniową) przy ściskaniu pręta prostego podpartego dwustronnie przegubowo (rys. 4).

Jako że warunki podparcia nie określają uprzywilejowanego kierunku wygięcia pręta, zatem wygięcie nastąpi w płaszczyźnie najmniejszej sztywności na zginanie *EI*. W stanie równowagi w postaci wygiętej pojawia się dodatkowo moment gnący, którego wartość w dowolnym przekroju wynosi:

$$M_g = Py \tag{1}$$

Równanie osi ugiętej ma postać:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_g \tag{2}$$



Rys. 4. Pręt prosty ściskany osiowo

Stąd można zapisać:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py \tag{3}$$

Przekształcając powyższą zależność otrzymuje się:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \tag{4}$$

lub

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0, \tag{5}$$

gdzie

$$k^2 = \frac{P}{EI} \tag{6}$$

Otrzymano równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach, dla którego poszukuje się rozwiązania w postaci:

$$y = C\sin kx + D\cos kx \tag{7}$$

Uwzględniamy warunki brzegowe w miejscach podparcia pręta w postaci:

$$y(x=0) = 0 \tag{8}$$

$$y(x=l) = 0 \tag{9}$$

Z warunku (8) wynika, iż $D = 0$. Równanie osi ugiętej przyjmuje postać:

$$y = C\sin kx \tag{10}$$

Podstawiając warunek brzegowy (9) otrzymuje się:

$$C\sin kl = 0 \tag{11}$$

Równanie powyższe jest spełnione w następujących przypadkach:

a) $C = 0$, wówczas dla każdego x otrzymuje się $y = 0$ – wyboczenie nie występuje, a pręt pozostaje prosty (przypadek trywialny);

b) $\sin kl = 0$, co jest spełnione, gdy $kl = n\pi$, n = 0, 1, 2, ...

Z warunku b) otrzymuje się:

$$kl = l\sqrt{\frac{P}{EI}} = n\pi \tag{12}$$

Wyznaczając z powyższego równania siłę uzyskuje się:

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2} \tag{13}$$

Dla $n = 0$ otrzymuje się $P = 0$. Z kolei podstawiając $n = 1$ oblicza się maksymalną wartość siły ściskającej P, dla której możliwe jest zachowanie równowagi pręta w postaci wygiętej – jest to tzw. *eulerowska siła krytyczna*:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{14}$$

Dla tej wartości siły krytycznej równanie różniczkowe osi ugiętej przyjmuje postać:

$$y = C\sin\frac{\pi x}{l} \tag{15}$$

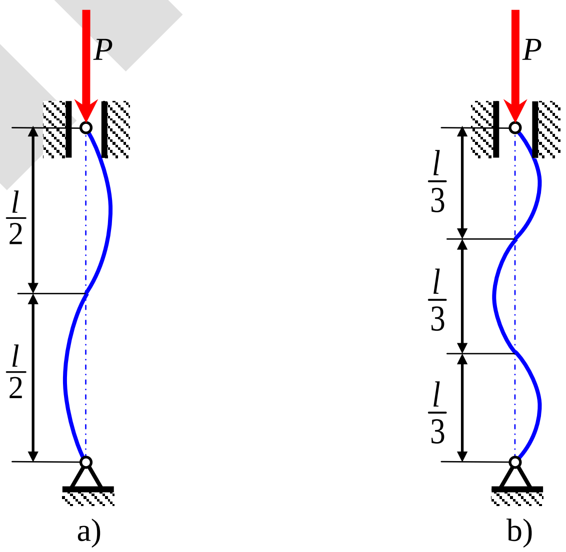
Tak więc oś ugięta jest sinusoidą, przy czym

$$C = y\left(\frac{l}{2}\right) \tag{16}$$

Jeśli za kl podstawi się dalsze wartości ($kl = 2\pi$, $kl = 3\pi$ itd.), wówczas otrzymuje się:

$$\begin{aligned} kl = 2\pi &\Rightarrow P_{kr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \\ kl = 3\pi &\Rightarrow P_{kr} = \frac{9\pi^2 EI}{l^2} \text{ itd.} \end{aligned} \tag{17}$$

Oś ugięta przyjmuje wówczas postać dwu, trzech lub więcej sinusoidalnych półfal (rys. 5). Te większe wartości siły krytycznej nie mają praktycznego znaczenia, gdyż już po osiągnięciu pierwszej wartości krytycznej (dla $n = 1$) siła powoduje wygięcie pręta w kształcie jednej półfali i nie jest możliwa zmiana tego kształtu.



Rys. 5. Postaci wyboczenia dla a) $n = 2$; b) $n = 3$

W ogólnym przypadku podaje się zależność uwzględniającą różne sposoby podparcia:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_w^2}, \tag{18}$$

gdzie:

$l_w = \mu l$ – długość wyboczeniowa pręta;

μ – współczynnik zależny od sposobu mocowania pręta (np. dla mocowania dwustronnie przegubowego $\mu = 1$).

Jeżeli chce się wyznaczyć naprężenia krytyczne, to siłę krytyczną należy podzielić przez pole przekroju poprzecznego pręta A. Uzyskuje się wtedy zależność:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{A l_w^2} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{l_w^2}, \tag{19}$$

gdzie:

$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ – promień bezwładności przekroju poprzecznego pręta.

Inaczej można zapisać zależność (19) w postaci:

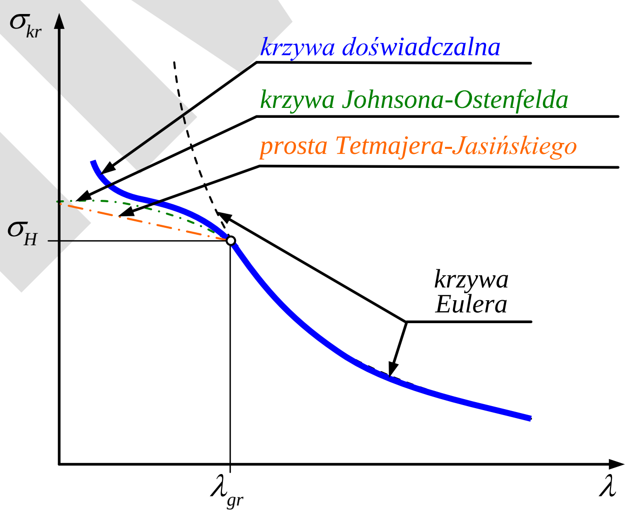
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \tag{20}$$

gdzie:

λ – *smukłość pręta:*

$$\lambda = \frac{l_w}{i} \tag{21}$$

Graficzną interpretacją wzoru (20) jest hiperbola Eulera przedstawiona na rys. 6. Na rysunku tym przedstawiono również zakres stosowalności wzoru Eulera. Wzór ten może być stosowany wyłącznie w zakresie sprężystym (dla $\sigma_{kr} \le \sigma_H$), czemu odpowiadają wartości smukłości $\lambda \ge \lambda_{gr}$.



Rys. 6. Zależność naprężeń krytycznych od smukłości pręta ulegającego wyboczeniu

Wartość graniczną smukłości wyznacza się z zależności:

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_H}} \tag{22}$$

W zakresie sprężysto-plastycznym (posprężystym) stosuje się przeważnie jedną z dwóch aproksymacji:

1) prostą Tetmajera-Jasińskiego:

$$\sigma_{kr} = A - B\lambda \tag{23}$$

2) parabolą Johnsona-Ostenfelda:

$$\sigma_{kr} = a - b\lambda^2 \tag{24}$$

Współczynniki materiałowe A i B oraz a i b wyznacza się dla danego materiału pręta odpowiednio z zależności:

$$\begin{gathered} A = R_e \\ B = \frac{R_e - R_H}{\pi}\sqrt{\frac{R_H}{E}} \\ a = R_e \\ b = \frac{R_e^2}{4E\pi^2} \end{gathered} \tag{25}$$

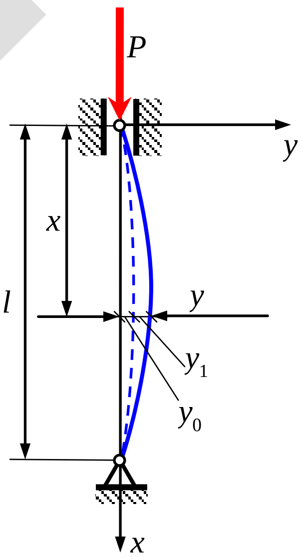
W literaturze można spotkać gotowe tablice współczynników A, B oraz a i b dla różnych materiałów.

W przypadku obliczeń wytrzymałościowych „na wyboczenie" należy zawsze sprawdzić, w jakim przedziale mieści się smukłość pręta λ i w zależności od tego stosować odpowiednie wzory. Jeżeli $\lambda \geq \lambda_{gr}$, to można stosować wzór Eulera (18) na siłę krytyczną. Jeżeli $\lambda < \lambda_{gr}$, to należy stosować wzory do wyboczenia sprężysto-plastycznego, czyli odpowiednio: aproksymację prostą Tetmajera-Jasińskiego (23) lub parabolą Johnsona-Ostenfelda (24).

Należy ponadto zwrócić uwagę, że smukłość pręta λ zależy tylko od wielkości geometrycznych pręta (21), zaś smukłość graniczna λ_{gr} zależy tylko od własności materiałowych (22).

3.3 *Wyboczenie pręta o wstępnej krzywiźnie*

Rozważany jest pręt zamocowany obustronnie przegubowo jak na rys. 7.



Rys. 7. Wyboczenie pręta o wstępnej krzywiźnie

Zakłada się, że pręt (np. na skutek wielokrotnego przeprowadzania na nim doświadczenia) nie jest prosty, lecz posiada pewną niewielką krzywiznę. Niech oś tego pręta przed przyłożeniem siły będzie krzywą, którą można opisać równaniem:

$$y_0 = y_0(x), \quad x \in \langle 0, l \rangle \tag{26}$$

Przyłożenie do pręta osiowej siły P spowoduje, że każdy punkt osi o współrzędnej x przemieści się o wielkość $y_1(x)$. Tak więc krzywą będącą teraz osią pręta można zapisać w postaci:

$$y(x) = y_1(x) + y_0(x) \tag{27}$$

Równanie osi ugiętej belki ma postać:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_g, \tag{28}$$

gdzie:

$$M_g = Py = P(y_1 + y_0), \tag{29}$$

czyli:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py_1 - Py_0 \tag{30}$$

Po podzieleniu obu stron przez EI i uporządkowaniu otrzymuje się:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + K^2y_1 = -K^2y_0, \tag{31}$$

gdzie:

$$K^2 = \frac{P}{EI} \tag{32}$$

Zajmijmy się obecnie osią pręta przed odkształceniem. Wiadomo, że oś pręta wyboczonego można opisać równaniem:

$$y_0 = C\sin\frac{\pi x}{l}, \tag{33}$$

gdzie:

$$C = y_0 = y\left(\tfrac{l}{2}\right) \tag{34}$$

W pręcie pierwotnie prostym wskutek wielokrotnego przeprowadzania na nim doświadczenia, podczas którego jego oś wyginała się zgodnie z równaniem (33), powstały pewne niewielkie odkształcenia trwałe. Jest zatem uzasadnione przyjąć, że po pewnym czasie oś prosta stała się krzywą o równaniu (33) – oczywiście y_0 jest bardzo małe. Podstawiając zależność (33) do równania (31) otrzymuje się:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + K^2y_1 = -K^2y_0\sin\frac{\pi x}{l} \tag{35}$$

Zgodnie z metodą przewidywań dla zwyczajnych niejednorodnych równań różniczkowych o stałych współczynnikach rozwiązania równania (35) poszukuje się w postaci analogicznej do jego prawej strony. Rozwiązanie to powinno spełniać ponadto warunki brzegowe, które w tym przypadku przyjmują postać:

$$y_1(0) = y_1(l) = 0 \tag{36}$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja określona równaniem:

$$y_1(x) = c\sin\frac{\pi x}{l} \tag{37}$$

spełnia warunki (36). Wystarczy zatem dobrać parametr „c” tak, aby spełniała ona również równanie (35). Podstawiając (37) do (35) otrzymuje się po uporządkowaniu:

$$c\left(K^2 - \frac{\pi^2}{l^2}\right)\sin\frac{\pi x}{l} = K^2 y_0 \sin\frac{\pi x}{l} \tag{38}$$

Aby równanie powyższe było tożsamością, musi być spełniony warunek:

$$c = \frac{-K^2 y_0}{K^2 - \frac{\pi^2}{l^2}} = \frac{y_0}{\frac{\pi^2}{l^2K^2} - 1} \tag{39}$$

Wprowadza się oznaczenie:

$$\beta = \frac{P}{P_{kr}} = \frac{P}{\frac{\pi^2 EI}{l^2}} = \frac{P}{EI}\frac{l^2}{\pi^2} = K^2\frac{l^2}{\pi^2} \tag{40}$$

Uwzględniając powyższe oznaczenie w równaniu (39) otrzymuje się:

$$c = \frac{\beta y_0}{1-\beta} \tag{41}$$

Tak więc rozwiązaniem równania (35) jest funkcja:

$$y_1 = \frac{\beta}{1-\beta} y_0 \sin\frac{\pi x}{l} \tag{42}$$

Przyrost strzałki ugięcia wynosi:

$$y_1\left(x = \frac{l}{2}\right) = y_1 = \frac{\beta}{1-\beta} y_0 \tag{43}$$

Całkowitą strzałkę ugięcia można określić z zależności:

$$y = y_0 + y_1 = y_0 + \frac{\beta}{1-\beta} y_0 = \frac{y_0}{1-\beta} \tag{44}$$

Uwzględniając oznaczenie (40) w powyższej zależności otrzymuje się:

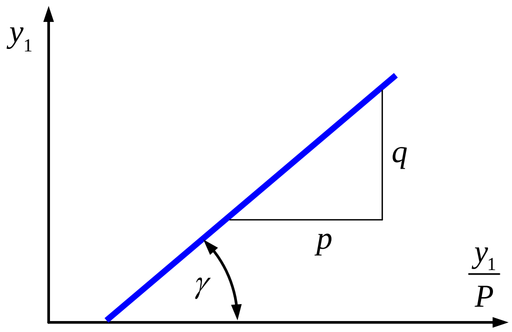
$$y_0 + y_1 = \frac{P_{kr} y_0}{P_{kr} - P} \tag{45}$$

lub

$$y_1 = P_{kr}\frac{y_1}{P} - y_0 \tag{46}$$

Równanie to jest liniowe ze względu na zmienne y_1 oraz $\frac{y_1}{P}$, co można przedstawić na wykresie (rys. 8). Tangens kąta nachylenia prostej na wykresie jest równy P_{kr}:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{q}{p} = P_{kr} \tag{47}$$



Rys. 8. Graficzne przedstawienie zależności (46)

4. PRZEBIEG ĆWICZENIA

Sposób przeprowadzenia ćwiczenia zostanie przedstawiony w trakcie zajęć laboratoryjnych.

5. OPRACOWANIE WYNIKÓW I WYTYCZNE DO SPRAWOZDANIA

Sprawozdanie powinno zawierać:

I. Cel ćwiczenia.

II. Krótki wstęp teoretyczny.

III. Szkic i opis stanowiska pomiarowego, uwzględniając badane pręty (materiał, przekrój, długość, E).

IV. Protokół pomiarowy.

V. Część obliczeniową, w której należy:

1. Wyliczyć główne centralne momenty bezwładności przekroju (przekrojów) i znaleźć wartość I_{min}.
2. Dla wszystkich zastosowanych prętów i sposobów mocowania:
   - wyliczyć teoretyczną wartość siły krytycznej P_{kr} z zależności (18) przyjmując założenia o materiale prętów z tabeli poniżej;
   - sporządzić wykres zależności $y_1 = f\left(\frac{y_1}{P}\right)$;
   - wyznaczyć z wykresu doświadczalną wartość siły krytycznej P_{kr}^d;
   - obliczyć względny błąd pomiaru $\eta = \frac{\left|P_{kr}^d - P_{kr}\right|}{P_{kr}} 100\%$;
   - określić **rodzaj materiału**, z którego wykonano badany pręt – wyliczyć ze wzoru (18) moduł Younga E podstawiając jako siłę krytyczną P_{kr}^d.

VI. Wnioski z ćwiczenia.

6. PRZYKŁADOWE PYTANIA KONTROLNE

1. Omów rodzaje równowagi.
2. Co to jest: stateczność, utrata stateczności, siła krytyczna?
3. Co nazywamy wyboczeniem (sprężystym) pręta?
4. Co to jest siła krytyczna?
5. Omów wzór Eulera na siłę krytyczną.
6. Jak jest zakres stosowania wzoru Eulera?
7. Jak można wyliczyć siłę krytyczną w zakresie posprężystym?
8. Co to jest smukłość pręta? Jak wyznacza się smukłość graniczną?

7. LITERATURA

1. Beluch W., Burczyński T., Fedeliński P., John A., Kokot G., Kuś W.: *Laboratorium z wytrzymałości materiałów*. Wyd. Politechniki Śląskiej, Skrypt nr 2285, Gliwice, 2002.
2. Bąk R., Burczyński T.: *Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego*, WNT, Warszawa 2001.
3. Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z.: *Wytrzymałość materiałów*, t. I-II, WNT, Warszawa 1996-97.
4. Timoshenko S.P.: *Teoria stateczności prętów*, Arkady 1961.

Instytut Mechaniki i Inżynierii Obliczeniowej
Wydział Mechaniczny Technologiczny, Politechnika Śląska
www.imio.polsl.pl

PROTOKÓŁ Z ĆWICZENIA

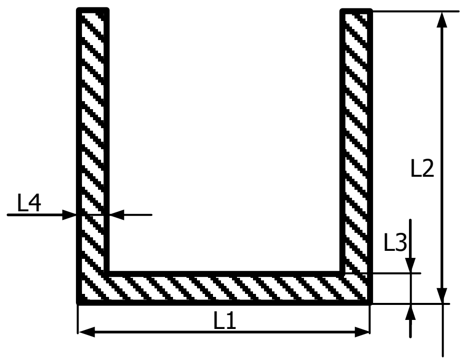
BADANIE STATECZNOŚCI PRĘTÓW

Kierunek:______ Grupa: _____ Sekcja: ___________________________

Data wykonania ćwiczenia:______________

Prowadzący: _____________________________ Podpis __________________

Rodzaj materiału	**PA6N**
Moduł Younga (E) [MPa]	
Długość pręta (l) [m]	
L1 [mm]	
L2 [mm]	
L3 [mm]	
L4 [mm]	



Sposób mocowania 1	**góra:**	**dół:**
Lp	**P [kG]**	**f_1 [mm]**
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		

Sposób mocowania 2	**góra:**	**dół:**
Lp	**P [kG]**	**f_1 [mm]**
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		