



Katedra Mechaniki i Inżynierii Obliczeniowej
Wydział Mechaniczny Technologiczny
Politechnika Śląska

www.polsl.pl/rmt4

LABORATORIUM WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

**Zastosowanie
metody elementów skończonych
do rozwiązywania układów prętowych**

1. CEL ĆWICZENIA

- ♦ Zapoznanie się z podstawami metody elementów skończonych w aspekcie jej zastosowania do rozwiązywania układów prętowych.
- ♦ Wykonanie obliczeń dla wybranych układów z wykorzystaniem oprogramowania wskazanego przez prowadzącego.

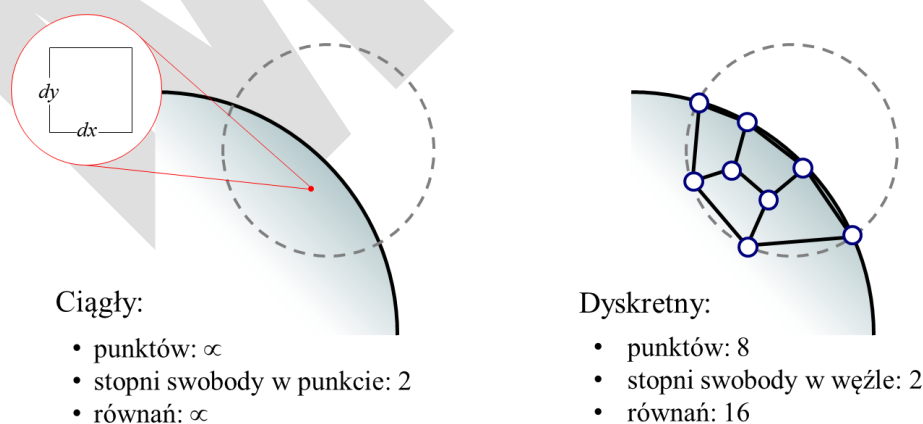
2. WPROWADZENIE

Metoda elementów skończonych (MES) jest jedną z najczęściej stosowanych przybliżonych metod rozwiązywania *zagadnień brzegowych*. Zagadnienie brzegowe to zadanie opisane równaniem lub (częściej) układem równań różniczkowych, zwykle o pochodnych cząstkowych, z *warunkami jednoznaczności*. Do warunków jednoznaczności zalicza się: warunki geometryczne, fizyczne i brzegowe; w przypadku zagadnień zmiennych w czasie (mówimy wówczas o *zagadnieniu brzegowo-początkowym*) dodatkowo są to warunki początkowe.

Dla wielu realnych problemów fizycznych znalezienie rozwiązania problemu brzegowego w postaci analitycznej jest trudne lub wręcz niemożliwe do osiągnięcia, dlatego poszukuje się metod przybliżonych, jak MES.

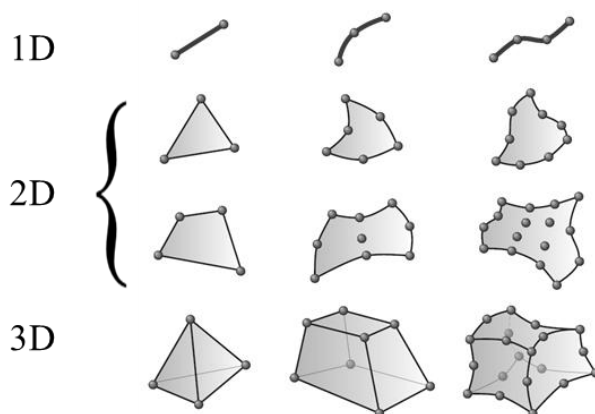
MES, poza rozpatrywanymi w niniejszej instrukcji zagadnieniami mechaniki, można stosować do rozwiązywania różnorodnych problemów, takich jak np. przepływ ciepła, mechanika płynów, zagadnienia elektryczne, elektromagnetyczne czy akustyczne. Jeśli równocześnie rozpatrywane jest więcej niż jedno zjawisko fizyczne (wyznaczone wielkości fizyczne oddziałują na siebie w taki sposób, że obliczenie jednej z nich jest niemożliwe bez wyznaczenia drugiej), mówi się o tzw. *polach sprzężonych*; przykładami mogą być sprzężenia termomechaniczne, elektro-termo-mechaniczne czy piezoelektryczne.

Istota metody sprowadza się do podziału (dyskretyzacji) analizowanego ośrodka ciągłego na pewną liczbę podobszarów, tzw. *elementów skończonych* oraz aproksymacji wielkości opisującej stan układu (np. przemieszczeń) w obszarze tych elementów. W efekcie układ równań różniczkowych przyjmuje postać układu równań algebraicznych. Przykład dyskretyzacji fragmentu ośrodka ciągłego przedstawiono na Rys. 1.



Rys. 1. Idea dyskretyzacji na przykładzie obszaru 2D

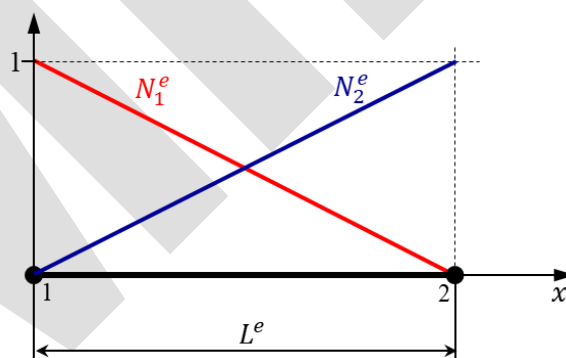
Element skończony to prosta, płaska lub przestrzenna figura geometryczna, dla której określone zostały wyróżnione punkty zwane *węzłami*. W zależności od potrzeb może element skończony przyjmować różne kształty i posiadać różną liczbę węzłów (Rys. 2). W przypadku zagadnień 1D elementy mają postać odcinków. Dwuwymiarowe elementy skończone przyjmują zazwyczaj kształt trójkątów bądź czworokątów. Elementy 3D (bryłowe) mogą mieć różne kształty; do najczęściej stosowanych należą czworościany i sześciściany.



Rys. 2. Przykładowe elementy skończone 1D, 2D, i 3D

Elementy skończone mogą się łączyć wyłącznie w węzłach, z czego wynika, że węzły mogą należeć do jednego lub większej liczby elementów skończonych. W metodzie elementów skończonych obliczenia prowadzone są tylko dla węzłów – w przypadku sprężystości otrzymuje się wartości składowych przemieszczeń. Następnie przemieszczenia są interpolowane w analizowanym obszarze z wykorzystaniem *funkcji kształtu*.

Funkcje kształtu N_i^e , gdzie e oznacza numer elementu a i numer węzła w elemencie, to funkcje interpolacyjne jednoznacznie określające rozkład analizowanej wielkości fizycznej wewnątrz elementów skończonych, zależne od wartości tych wielkości fizycznych w węzłach. Są one zawsze tak zbudowane, aby w węzłach których dotyczą ich wartość wynosiła 1 a w pozostałych węzłach przyjmowały wartość 0 (Rys. 3). Od stopnia funkcji kształtu może pochodzić określenie elementu skończonego, np. *element liniowy*, *element kwadratowy* itd.

Rys. 3. Funkcje kształtu wykorzystywane w elemencie prętowym (L^e – długość elementu e)

Stopnie swobody (ang. *degrees of freedom* – DOFs) to minimalna liczba niezależnych zmiennych opisujących jednoznacznie stan (modelu) układu fizycznego. W mechanice jest to liczba niezależnych ruchów, jakie ciało jest w stanie zrealizować w przestrzeni. W przypadku MES liczba stopni swobody pojedynczego elementu skończonego jest równa liczbie stopni swobody w pojedynczym węźle pomnożona przez liczbę węzłów w elemencie.

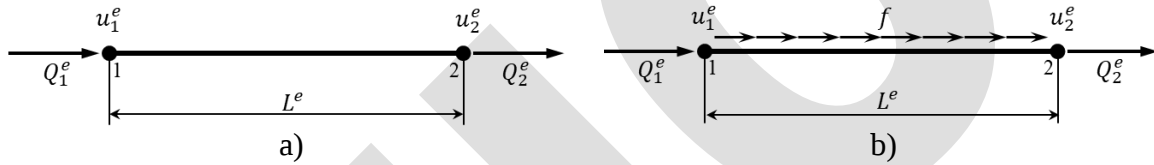
Liczba stopni swobody w węźle zależy od rodzaju elementu skończonego i jego wymiarowości. I tak np. w przestrzeni 3D element prętowy ma 6 stopni swobody (po trzy składowe przemieszczenia liniowego w każdym z 2 węzłów), dwuwęzłowy element belkowy 12 (po trzy składowe przemieszczenia liniowego i trzy obroty w każdym z 2 węzłów) a czworowęzłowy element bryłowy również 12 (po trzy składowe przemieszczenia liniowego w każdym z 4 węzłów).

W ramach niniejszej instrukcji będziemy rozważać elementy 1D w postaci elementów prętowych i elementów belkowych. W przypadku zastosowania elementów prętowych połączenia w węzłach przenoszą jedynie siły podłużne. W przypadku stosowania elementów belkowych połączenia w węzłach przenoszą siły podłużne, siły poprzeczne oraz momenty gnące, a dla układów przestrzennych również momenty skręcające. Elementy prętowe stosowane są do modelowania kratownic, zaś elementy belkowe do modelowania belek i ram.

Istota MES jest skrótowo przedstawiona w następnym rozdziale na przykładzie elementów prętowych. Opis elementów belkowych (i innych) można znaleźć np. w [1-4].

3. ELEMENTY PRĘTOWE

Rozważać będziemy jednowymiarowy element prętowy e z dwoma węzłami i dwoma stopniami swobody, odpowiadającymi dwóm przemieszczeniom osiowym u_1^e, u_2^e , jak pokazano na Rys. 4a. Rozpatrywany element ma długość L^e , stałe pole powierzchni przekroju poprzecznego A i jest wykonany z liniowosprężystego materiału o module Younga E .



Rys. 4. Element prętowy a) bez obciążenia ciągłego; b) obciążony obciążeniem ciągłym

Odształcenie ε elementu prętowego wyraża się jako:

$$\varepsilon = \frac{u_2^e - u_1^e}{L^e} \quad (1)$$

Naprężenie normalne σ można wyznaczyć korzystając z prawa Hooke'a:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{u_1^e - u_2^e}{L^e} \quad (2)$$

Siła osiowa N (otrzymana w wyniku całkowania naprężeń na przekroju poprzecznym pręta) wyraża się jako:

$$N = A\sigma = E^e A^e \frac{u_1^e - u_2^e}{L^e} \quad (3)$$

Uwzględniając równowagę statyczną sił węzłowych Q_1^e i Q_2^e , można je wyrazić jako:

$$Q_2^e = -Q_1^e = \frac{E^e A^e}{L^e} (u_1^e - u_2^e) \quad (4)$$

Wprowadzając oznaczenie $k^e = \frac{E^e A^e}{L^e}$ można zależność (4) zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{Q}^e = \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{Bmatrix} = k^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (5)$$

gdzie: $\mathbf{K}^e$ – kwadratowa macierz sztywności elementu skończonego, $\mathbf{Q}^e, \mathbf{u}^e$ – odpowiednio jednokolumnowe macierze (tzw. wektory) sił węzłowych i przemieszczeń węzłowych.

W przypadku, gdy rozważany element prętowy jest poddany działaniu równomiernie rozłożonego obciążenia ciągłego f (Rys. 4 b), po przekształceniu go na siły węzłowe równanie (5) przyjmie postać:

$$\mathbf{Q}^e = k^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} - \frac{(fl)^e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{f}^e \quad (6)$$

Przemieszczenie w dowolnym miejscu elementu skończonego może być aproksymowane funkcją liniową:

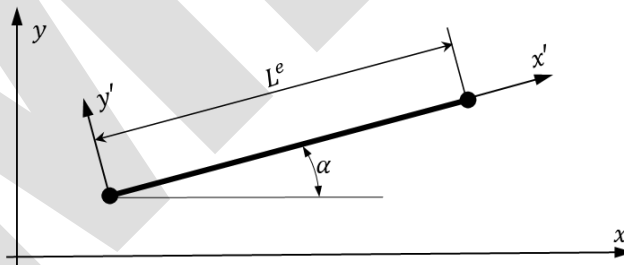
$$U^e(x) = (x)u_1^e + N_2^e(x)u_2^e \quad (7)$$

przy czym funkcje kształtu $N_i^e(x)$ wyrażają się wzorami:

$$N_1^e(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad N_2^e(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (8)$$

Łatwo zauważyć, że dla $x = x_1$ oraz $x = x_2$ spełnione są wymagania stawiane funkcjom kształtu odnośnie ich wartości w poszczególnych węzłach. Na podstawie uzyskanych przemieszczeń oblicza się korzystając z zależności (1) i (2) odpowiednio odkształcenia i naprężenia.

Dotychczas rozpatrywaliśmy pojedynczy element skończony w jego lokalnym układzie współrzędnych, gdzie jedna z osi układu była zgodna z osią pręta. W ogólnym przypadku konstrukcja składa się z wielu elementów, które ponadto mogą być różnie zorientowane w przestrzeni (np. kratownica). W związku z tym wprowadza się globalny układ współrzędnych, wspólny dla wszystkich elementów skończonych w konstrukcji. Rozróżnienie pomiędzy tymi dwoma rodzajami układów współrzędnych przedstawiono (dla jednego elementu skończonego) na Rys. 5. Dla wszystkich elementów skończonych przeprowadza się transformację z lokalnego do globalnego układu współrzędnych stosując odpowiednią macierz transformacji – szczegóły można znaleźć np. w [1].



Rys. 5. Układy współrzędnych lokalny $x'y'$ i globalny xy obrócone względem siebie o kąt α

Kolejnym krokiem jest utworzenie wspólnej macierzy sztywności $\mathbf{K}$ dla całej konstrukcji poprzez agregację lokalnych macierzy sztywności poszczególnych elementów skończonych. Liczba wierszy i kolumn w globalnej macierzy sztywności $\mathbf{K}$ jest równa liczbie stopni swobody całej konstrukcji. Sposób przeprowadzania agregacji zostanie przedstawiony w następnym rozdziale.

Podstawowe równanie MES dla całej konstrukcji wyraża się jako:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{Q} \quad (9)$$

Powyższe równanie nie nadaje się jeszcze do rozwiązania, ponieważ macierz sztywności w dotychczasowej postaci jest macierzą osobliwą (jej wyznacznik główny jest równy zeru).

W niniejszym przypadku należy to interpretować jako brak stabilnego zamocowania konstrukcji – konstrukcja jako całość może się przemieszczać względem globalnego układu współrzędnych bądź też tworzy ona mechanizm. By móc uzyskać rozwiązanie, zadanie należy uzupełnić o warunki brzegowe. Jedną z metod uwzględniania warunków brzegowych jest *metoda kary*.

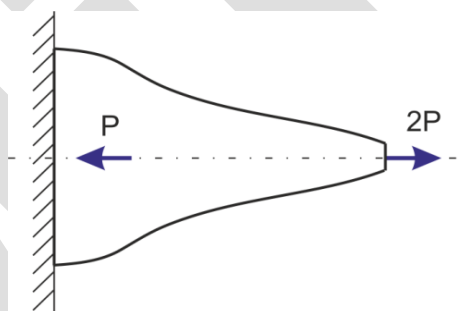
Metoda kary polega na modyfikacji macierzy $\mathbf{K}$ poprzez zadanie dużej sztywności w miejscach określenia warunku przemieszczeniowego (w ogólnym przypadku modyfikacji podlega również wektor obciążeń $\mathbf{Q}$ – np. gdy zadawane przemieszczenia są różne od zera, jak w przypadku luzu montażowego). Często stosowanym podejściem dodanie w tych miejscach pewnej stałej C . Stałą tą wylicza się mnożąc największy co do modułu element macierzy $\mathbf{K}$ przez „dużą wartość”, np. równą 10^4 . Tak przygotowane podstawowe równanie MES jest gotowe do rozwiązania.

4. PRZYKŁAD MODELOWANIA UKŁADU JEDNOWYMIAROWEGO

W niniejszym rozdziale przedstawiono kolejne kroki wykonywane w ramach rozwiązania przykładowego zadania z wykorzystaniem MES.

I. Przyjęcie modelu fizycznego rozważanego obiektu (definiowanie geometrii, określenie rodzaju stosowanych elementów skończonych)

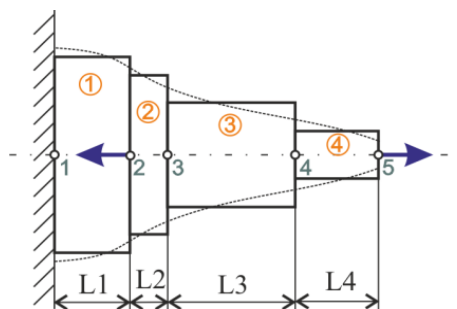
Rozważany jest pręt stalowy o zmiennym przekroju, utwierdzony jednym końcem, obciążony dwoma siłami, jak na Rys. 6. Przyjęto, że konstrukcja będzie modelowana z wykorzystaniem elementów prętowych o 1 stopniu swobody w każdym z 2 węzłów (przemieszczenie w kierunku osi pręta).



Rys. 6. Model fizyczny konstrukcji

II. Dyskretyzacja geometrii (podział na elementy skończone).

Pręt podzielono na 4 elementy skończone, jak pokazano na Rys. 7. Numery elementów skończonych umieszczono w kółkach a numery węzłów przy zaznaczonych punktach. Zauważ, że węzły 2, 3 oraz 4 należą do dwóch elementów skończonych każdy.



Rys. 7. Model dyskretny konstrukcji

III. Wyznaczenie lokalnych macierzy sztywności.

Ponieważ cały pręt wykonano z tego samego materiału, lokalna macierz sztywności dla każdego elementu prętowego ma postać:

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA^e}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e \end{bmatrix}, \quad e = 1..4 \quad (10)$$

IV. Agregacja (utworzenie globalnej macierzy sztywności $\mathbf{K}$ i wektora obciążeń $\mathbf{Q}$).

Zagregowana macierz sztywności ma dla przykładu postać:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 + k_{11}^4 & k_{12}^4 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^4 & k_{22}^4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Zauważ, że w węzłach które są wspólne dla sąsiadujących elementów dochodzi do łączenia lokalnych macierzy sztywności. Z kolei w miejscach, gdzie węzły nie należą do tego samego elementu, w macierzy $\mathbf{K}$ występują wartości zerowe.

Zagregowany wektor obciążeń dla przykładu wygląda następująco:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 2P \end{bmatrix} \quad (12)$$

Układ równań MES przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 + k_{11}^4 & k_{12}^4 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^4 & k_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 2P \end{bmatrix} \quad (13)$$

V. Uwzględnienie warunków brzegowych (np. metoda kary).

Ponieważ w węźle 1 jest odebrany (jedyne) stopień swobody, zastosowanie metody kary prowadzi do następującej postaci równania (9):

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 + C & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 + k_{11}^4 & k_{12}^4 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^4 & k_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 2P \end{bmatrix} \quad (14)$$

VI. Rozwiązanie układu równań MES.

Z podstawowego równania MES wyznacza się macierz niewiadomych, jaką jest wektor przemieszczeń brzegowych U . W tym celu stosuje się jedną z numerycznych metod rozwiązywania układów równań jak np. metoda eliminacji Gaussa. Po wyznaczeniu U , w następnym etapie wyliczane są odkształcenia i naprężenia w węzłach konstrukcji.

5. OPROGRAMOWANIE MES

W celu rozwiązania konkretnego zadania brzegowego z wykorzystaniem oprogramowania MES należy stworzyć model rozpatrywanego układu składający się z elementów skończonych. W rzeczywistym układzie mechanicznym wyodrębnia się części składowe, które modeluje się jako elementy jednowymiarowe (prętowe, belkowe), elementy dwuwymiarowe (płytkowe, tarczowe, powłokowe, osiowosymetryczne) czy trójwymiarowe (bryłowe). W niniejszej instrukcji ograniczono się do elementów jednowymiarowych (1D).

Większość dostępnych programów MES umożliwia zarówno tworzenie geometrii rozpatrywanego układu, jak i jej import z plików CAD. Model geometryczny jest pomocny w tworzeniu siatki elementów skończonych oraz może ułatwiać zadawanie obciążeń i warunków brzegowych.

Proces rozwiązywania zadania mechaniki z zastosowaniem oprogramowania MES może wyglądać jak poniżej. Zauważ, że kolejność działań jest tu nieco inna niż podana w poprzednim rozdziale – często stosowanym we współczesnych programach MES udogodnieniem jest możliwość zadawania obciążeń i warunków brzegowych na geometrii. W tym przypadku oprogramowanie zadba o to, by odpowiednio przenieść je na siatkę elementów skończonych.

Kolejne etapy to:

1. Utworzenie lub import geometrii konstrukcji.
2. Zdefiniowanie własności poszczególnych składowych konstrukcji: materiału, wymaganych własności geometrii (jak np. przekrój poprzeczny w przypadku zagadnień 1D).
3. Zadanie obciążeń i warunków brzegowych.
4. Stworzenie siatki MES.
5. Przeprowadzenie analizy – uruchamiany jest odpowiedni moduł obliczeniowy.
6. Prezentacja wyników (mapy barwne, wartości w węzłach i inne).

6. PRZEBIEG ĆWICZENIA

Dla wybranych układów prętowych i/lub belkowych należy przeprowadzić obliczenia (wyznaczenie przemieszczeń, naprężeń i reakcji podporowych) przy użyciu programu metody elementów skończonych wskazanego przez prowadzącego.

7. OPRACOWANIE WYNIKÓW I WYTYCZNE DO SPRAWOZDANIA

Sprawozdanie powinno zawierać:

- I. Cel ćwiczenia.
- II. Opis rozwiązywanego zagadnienia i modelu numerycznego (z rysunkami).
- III. Wyniki obliczeń MES zgodnie z zaleceniami prowadzącego (w tym stosowne zrzuty ekranów).
- IV. Obliczenia analityczne.
- V. Analizę wyników i wnioski.

Prowadzący może zmienić wymagania dotyczące sprawozdania.

8. PRZYKŁADOWE PYTANIA KONTROLNE

1. Do czego służy metoda elementów skończonych?
2. Jakie są istotne cechy metody elementów skończonych?
3. Na czym polega dyskretyzacja?
4. Co to są funkcje kształtu i do czego służą?
5. Czym charakteryzują się funkcje kształtu?
6. Co to jest macierz sztywności i w jakim wzorze występuje?
7. Co to są elementy skończone, jakie rodzaje elementów modelują dany przypadek wytrzymałościowy?
8. Na czym polega agregacja macierzy sztywności?
9. Jakie kroki są wykonywane przy rozwiązywaniu zadania z wykorzystaniem MES?

9. LITERATURA

1. Śródka W.: *Trzy lekcje metody elementów skończonych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2004
2. Ferreira A. J. M., Fantuzzi N.: *MATLAB Codes for Finite Element Analysis*, Springer, 2020.
3. Beluch W., Burczyński T., Fedeliński P., John A., Kokot G., Kuś W.: *Laboratorium z wytrzymałości materiałów*. Wyd. Politechniki Śląskiej, Skrypt nr 2285, Gliwice, 2002.
4. Bąk R., Burczyński T.: *Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego*, WNT, Warszawa 2001.

DODATEK – PRZYKŁADOWE ZADANIA

Zadanie 1

Dla pręta stopniowanego podpartego i obciążonego jak na Rys. 8 wyznaczyć przemieszczenia punktów B, C oraz rozkład naprężeń. Do obliczeń przyjąć różne warianty obciążeń.

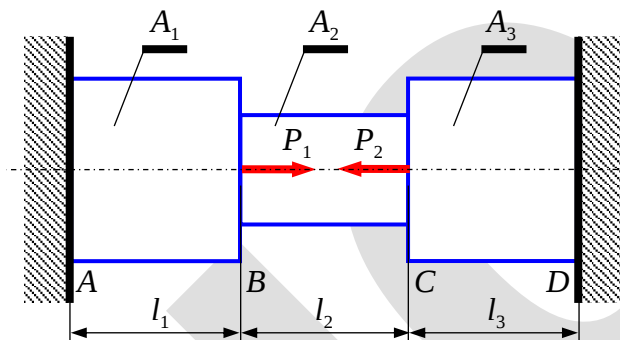
Przykładowe dane:

$$A_1 = 0.01 \text{ m}^2, A_2 = 0.005 \text{ m}^2, A_3 = 0.008 \text{ m}^2$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = 0.5 \text{ m}$$

$$P_1 = 5 \text{ kN}, P_2 = 2 \text{ kN}$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa (stal)}$$



Rys. 8. Pręt rozciągany – schemat statyczny

Zadanie 2

Dla belki podpartej i obciążonej jak na Rys. 9 wyznaczyć położenie osi ugiętej oraz rozkład naprężeń w przekroju poprzecznym wzdłuż osi belki. Wyznaczyć analitycznie przemieszczenia końca swobodnego belki dla wskazanego wariantu obciążenia i porównać z wynikami otrzymanymi numerycznie. Do obliczeń przyjąć różne warianty obciążenia.

Przykładowe dane:

$$l_1 = l_2 = 0.5 \text{ m}$$

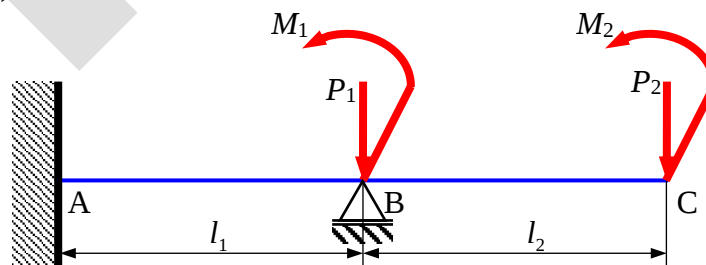
$$I_1 = I_2 = 8.33 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$W_1 = W_2 = 1.66 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$P_1 = 7 \text{ kN}, P_2 = 3 \text{ kN}$$

$$M_1 = 4 \text{ kNm}, M_2 = 2 \text{ kNm}$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa (stal)}$$



Rys. 9. Belka wspornikowa – schemat statyczny

Zadanie 3

Dla kratownicy płaskiej podpartej i obciążonej jak na Rys. 10 wyznaczyć przemieszczenia punktów B, D oraz naprężenia w prętach. Do obliczeń przyjąć różne warianty obciążeń.

Przykładowe dane:

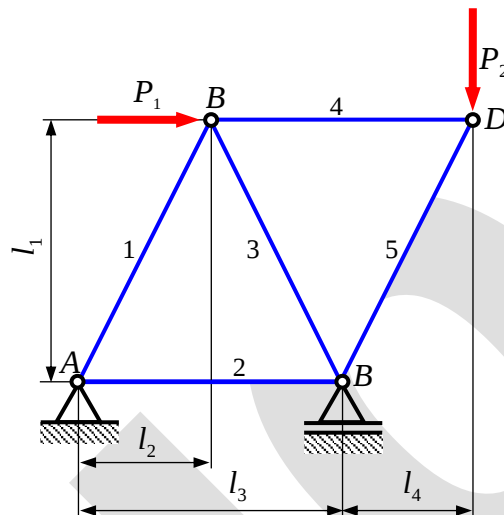
$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 0.01 \text{ m}^2$$

$$l_1 = l_3 = 1.0 \text{ m}$$

$$l_2 = l_4 = 0.5 \text{ m}$$

$$P_1 = 4 \text{ kN}, P_2 = 1 \text{ kN}$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa (stal)}$$



Rys. 10. Kratownica – schemat statyczny

Zadanie 4

Dla ramy podpartej i obciążonej jak Rys. 11 wyznaczyć położenie osi ugiętej oraz rozkład naprężeń. Wyznaczyć analitycznie przemieszczenia końca swobodnego D ramy dla wskazanego wariantu obciążenia i porównać z wynikami otrzymanymi numerycznie. Do obliczeń przyjąć różne warianty obciążenia.

Przykładowe dane:

$$l_1 = l_2 = 1.0 \text{ m}, l_3 = 0.5 \text{ m}$$

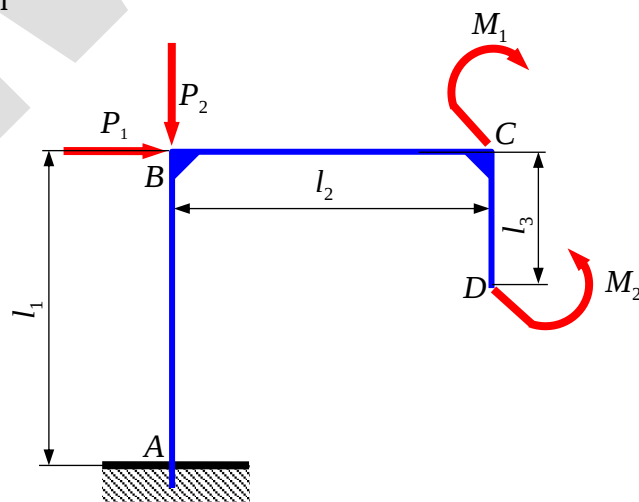
$$I_1 = I_2 = I_3 = 42.19 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$W_1 = W_2 = W_3 = 5.63 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$P_1 = 8 \text{ kN}, P_2 = 4 \text{ kN}$$

$$M_1 = 5 \text{ kNm}, M_2 = 3 \text{ kNm}$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa (stal)}$$



Rys. 11. Rama – schemat statyczny