



Katedra Mechaniki i Inżynierii Obliczeniowej
Wydział Mechaniczny Technologiczny
Politechnika Śląska

www.polsl.pl/rmt4

LABORATORIUM WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Zastosowanie metody elementów skończonych do rozwiązywania zagadnień dwuwymiarowych

CEL ĆWICZENIA

- ♦ Zapoznanie się z podstawami metody elementów skończonych w aspekcie jej zastosowania do rozwiązywania układów dwuwymiarowych.
- ♦ Wykonanie obliczeń dla wybranych układów z wykorzystaniem oprogramowania wskazanego przez prowadzącego.

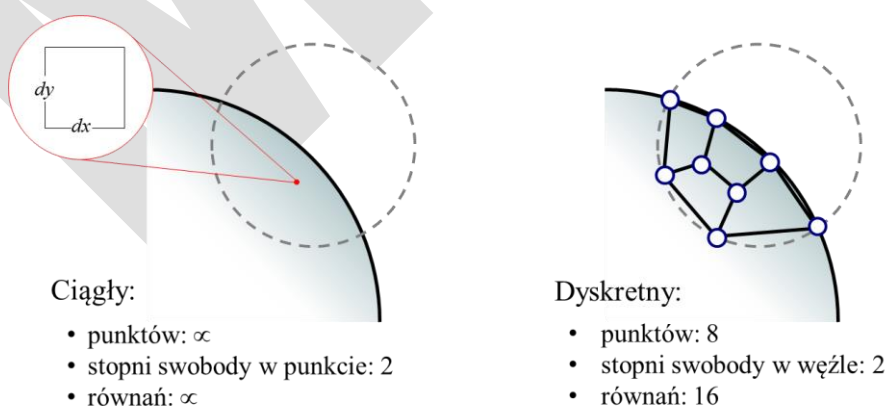
WPROWADZENIE

Metoda elementów skończonych (MES) jest jedną z najczęściej stosowanych przybliżonych metod rozwiązywania *zagadnień brzegowych*. Zagadnienie brzegowe to zadanie opisane równaniem lub (część) układem równań różniczkowych, zwykle o pochodnych cząstkowych, z *warunkami jednoznaczności*. Do warunków jednoznaczności zalicza się: warunki geometryczne, fizyczne i brzegowe; w przypadku zagadnień zmiennych w czasie (mówimy wówczas o *zagadnieniu brzegowo-początkowym*) dodatkowo są to warunki początkowe.

Dla wielu realnych problemów fizycznych znalezienie rozwiązania problemu brzegowego w postaci analitycznej jest trudne lub wręcz niemożliwe do osiągnięcia, dlatego poszukuje się metod przybliżonych, jak MES.

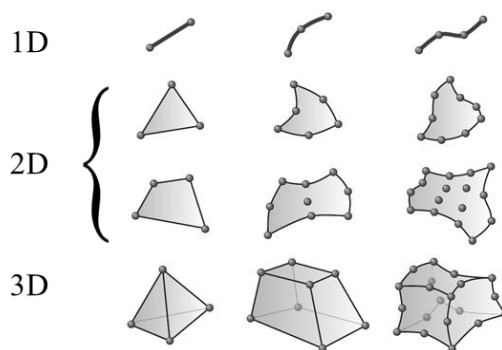
MES, poza rozpatrywanymi w niniejszej instrukcji zagadnieniami mechaniki, można stosować do rozwiązywania różnorodnych problemów, takich jak np. przepływ ciepła, mechanika płynów, zagadnienia elektryczne, elektromagnetyczne czy akustyczne. Jeśli równocześnie rozpatrywane jest więcej niż jedno zjawisko fizyczne (wyznaczone wielkości fizyczne oddziałują na siebie w taki sposób, że obliczenie jednej z nich jest niemożliwe bez wyznaczenia drugiej), mówi się o tzw. *polach sprzężonych*; przykładami mogą być sprzężenia termomechaniczne, elektro-termo-mechaniczne czy piezoelektryczne.

Istota metody sprowadza się do podziału (dyskretyzacji) analizowanego ośrodka ciągłego na pewną liczbę podobszarów, tzw. *elementów skończonych* oraz aproksymacji wielkości opisującej stan układu (np. przemieszczeń) w obszarze tych elementów. W efekcie układ równań różniczkowych przyjmuje postać układu równań algebraicznych. Przykład dyskretyzacji fragmentu ośrodka ciągłego przedstawiono na Rys. 1.



Rys. 1. Idea dyskretyzacji na przykładzie obszaru 2D

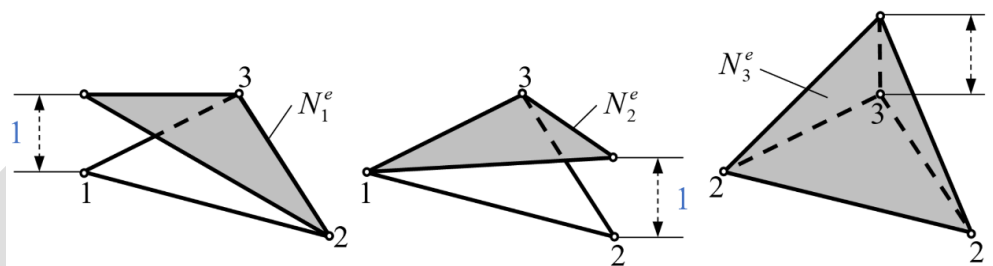
Element skończony to prosta, płaska lub przestrzenna figura geometryczna, dla której określone zostały wyróżnione punkty zwane *węzłami*. W zależności od potrzeb może element skończony przyjmować różne kształty i posiadać różną liczbę węzłów (Rys. 2). W przypadku zagadnień 1D elementy mają postać odcinków. Dwuwymiarowe elementy skończone przyjmują zazwyczaj kształt trójkątów bądź czworokątów. Elementy 3D (bryłowe) mogą mieć różne kształty; do najczęściej stosowanych należą czworościany i sześciściany.



Rys. 2. Przykładowe elementy skończone 1D, 2D, i 3D

Elementy skończone mogą się łączyć wyłącznie w węzłach, z czego wynika, że węzły mogą należeć do jednego lub większej liczby elementów skończonych. W metodzie elementów skończonych obliczenia prowadzone są tylko dla węzłów – w przypadku sprężystości otrzymuje się wartości składowych przemieszczeń. Następnie przemieszczenia są interpolowane w analizowanym obszarze z wykorzystaniem *funkcji kształtu*.

Funkcje kształtu N_i^e , gdzie e oznacza numer elementu a i numer węzła w elemencie, to funkcje interpolacyjne jednoznacznie określające rozkład analizowanej wielkości fizycznej wewnątrz elementów skończonych, zależne od wartości tych wielkości fizycznych w węzłach. Są one zawsze tak zbudowane, aby w węzłach których dotyczą ich wartość wynosiła 1 a w pozostałych węzłach przyjmowały wartość 0 (Rys. 3). Od stopnia funkcji kształtu może pochodzić określenie elementu skończonego, np. *element liniowy*, *element kwadratowy* itd.



Rys. 3. Funkcje kształtu wykorzystywane w trójwęzłowym elemencie trójkątnym

Stopnie swobody (ang. *degrees of freedom* – DOFs) to minimalna liczba niezależnych zmiennych opisujących jednoznacznie stan (modelu) układu fizycznego. W mechanice jest to liczba niezależnych ruchów, jakie ciało jest w stanie zrealizować w przestrzeni. W przypadku MES liczba stopni swobody pojedynczego elementu skończonego jest równa liczbie stopni swobody w pojedynczym węźle pomnożona przez liczbę węzłów w elemencie.

Liczba stopni swobody w węźle zależy od rodzaju elementu skończonego i jego wymiarowości. I tak np. w przestrzeni 3D element prętowy ma 6 stopni swobody (po trzy składowe przemieszczenia liniowego w każdym z 2 węzłów), dwuwęzłowy element belkowy 12 (po trzy składowe przemieszczenia liniowego i trzy obroty w każdym z 2 węzłów) a czworosienny, czterowęzłowy element bryłowy również 12 (po trzy składowe przemieszczenia liniowego w każdym z 4 węzłów).

Tematyka niniejszego laboratorium jest związana ze statycznymi zagadnieniami dwuwymiarowymi (płaskimi). Podstawy teoretyczne metody elementów skończonych dla zagadnień płaskich przedstawiono w literaturze zamieszczonej na końcu instrukcji [1-7]. W przypadku niniejszej instrukcji skupiono się na przedstawieniu sposobu wyznaczania macierzy sztywności trójwęzłowego elementu trójkątnego.

DWUWYMIAROWE ZAGADNIENIA SPRĘŻYSTOŚCI

Dwuwymiarowe zagadnienia teorii sprężystości związane mogą być z *płaskim stanem naprężenia* lub *płaskim stanem odkształcenia*. Płaski stan naprężenia występuje w cienkich tarczach obciążonych siłami leżącymi w płaszczyźnie środkowej. Płaski stan odkształcenia występuje w ciałach o dużej grubości obciążonych siłami równomiernie rozłożonymi wzdłuż powierzchni. Na rys. 4 w poglądowy sposób przedstawiono w przypadki, w których przyjmuje się upraszczające założenie płaskiego stanu naprężenia lub odkształcenia. W obydwu przedstawionych przypadkach obszarem analizy jest przekrój w płaszczyźnie xy , natomiast opis składowych stanu naprężenia i odkształcenia zależy od grubości układu. W płaskim stanie naprężenia tensor stanu naprężenia określany jest następująco:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Oznacza to, że składowe $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$. W płaskim stanie odkształcenia tensor stanu odkształcenia ma postać:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

W tym przypadku $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$. Warto zwrócić uwagę, że tensory naprężenia i odkształcenia są symetryczne. Elementy macierzy sprężystości zależą od tego, czy rozpatrywany jest płaski stan naprężenia czy odkształcenia [7].

Związek między naprężeniami oraz odkształceniami określa uogólnione prawo Hooke'a:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

gdzie $\mathbf{D}$ to macierz sprężystości. Dla płaskiego stanu naprężenia macierz sprężystości wyraża się jako:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

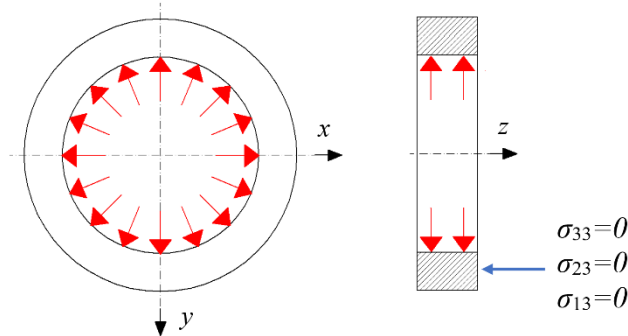
natomiast dla płaskiego stanu odkształcenia można ją zapisać jako:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

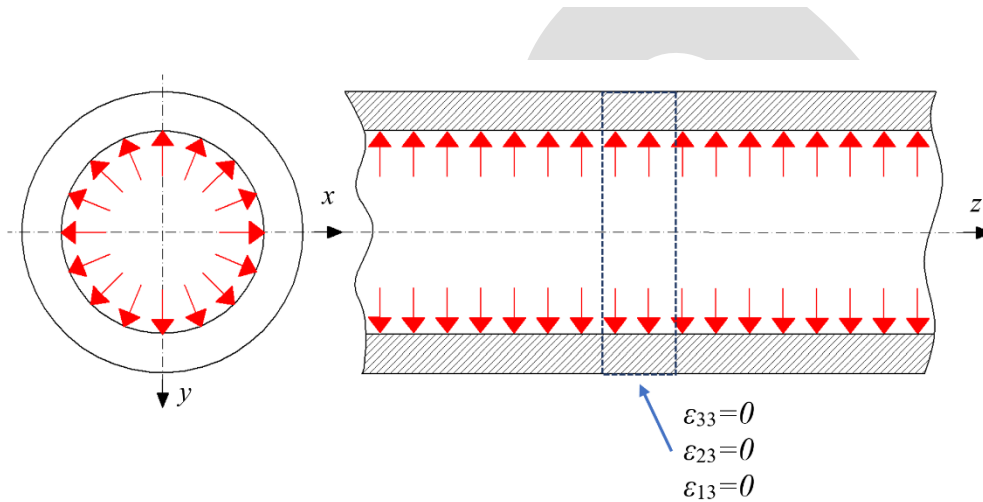
gdzie E to moduł Younga, a ν to liczba Poissona. Warto przypomnieć, że nie można utożsamiać płaskiego stanu naprężenia z płaskim stanem odkształcenia, ponieważ temu ostatniemu towarzyszą naprężenia σ_{33} :

$$\sigma_{33} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \neq 0 \quad (6)$$

a)



b)



Rys. 4. Zagadnienia płaskie związane z analizą przekroju w płaszczyźnie xy układu: a) płaski stan naprężenia; b) płaski stan odkształcenia [7]

Równania równowagi dla zagadnienia dwuwymiarowego teorii sprężystości mają postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:

X i Y – składowe sił objętościowych.

Zależności między odkształceniami ε_{ij} i przemieszczeniami u_i można przedstawić następująco:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}; \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \quad (8)$$

Wstawiając (3) i (8) do (7) otrzymuje się równania równowagi wyrażone w przemieszczeniach (równania Naviera-Lamego):

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + D_{33} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} \right) + X &= 0 \\ D_{33} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Równania (9) należy jeszcze uzupełnić warunkami brzegowymi, które w przypadku ogólnym mają postać warunków brzegowych mieszanych:

- dla przemieszczeń:

$$u_1 = \hat{u}_1, \quad u_2 = \hat{u}_2 \quad \text{na } \Gamma_1 \quad (10)$$

- dla sił powierzchniowych:

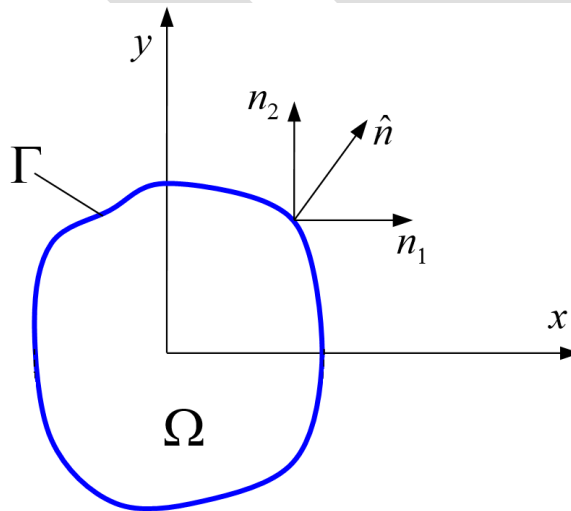
$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = \hat{p}_1 \\ p_2 &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 = \hat{p}_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{na } \Gamma_2 \quad (11)$$

gdzie:

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma;$$

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset;$$

n_i – składowe wektora normalnego $\hat{n}$ do brzegu Γ (Rys. 5).

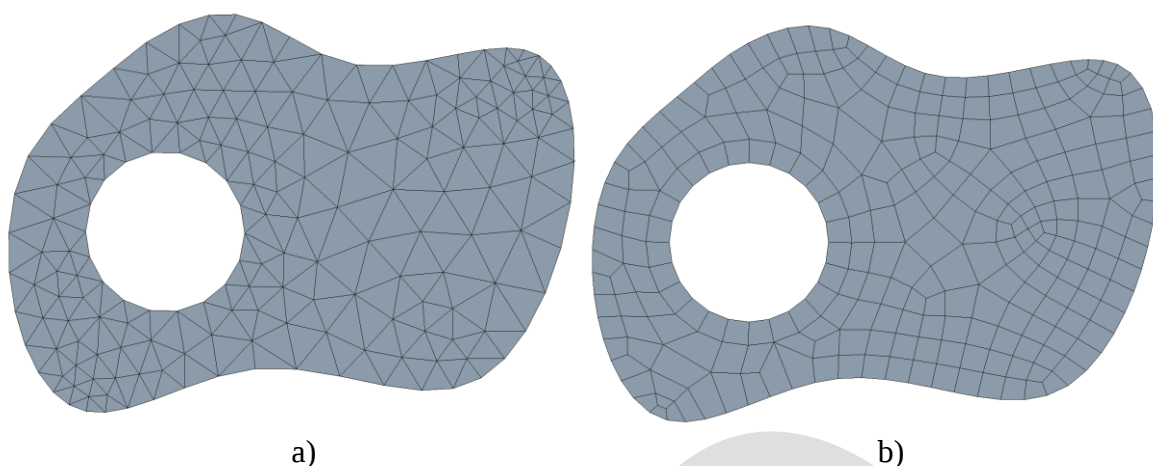


Rys. 5. Zagadnienie dwuwymiarowe: obszar Ω , brzeg Γ , wektor normalny do brzegu $\hat{n}$

Warunki brzegowe dla sił powierzchniowych można wyrazić przez przemieszczenia, jeśli w równaniu (11) uwzględnimy zależności (3) i (8). Otrzymujemy wówczas:

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(D_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) n_1 + D_{33} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) n_2 \\ p_2 &= D_{33} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) n_1 + \left(D_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) n_2 \end{aligned} \quad (12)$$

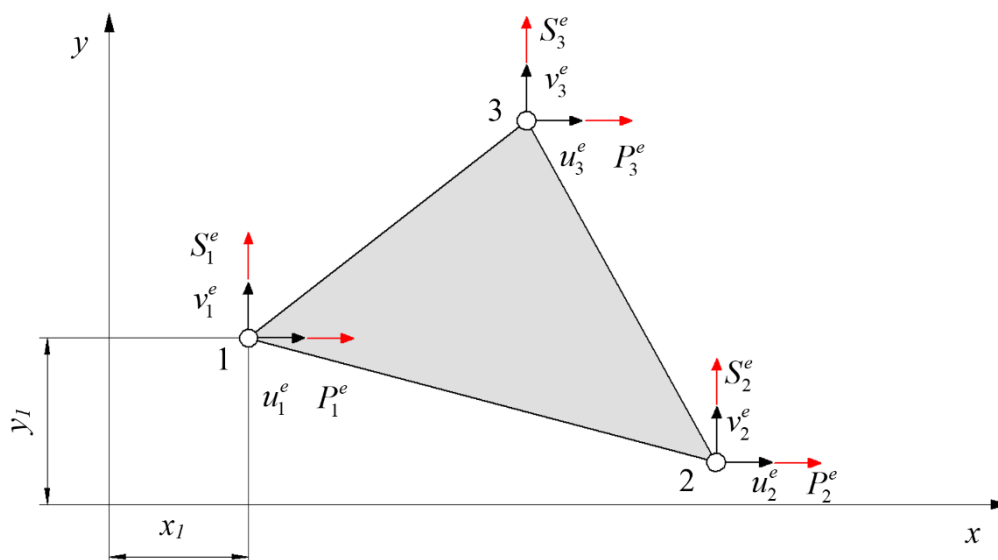
Układ równań (9) wraz z warunkami brzegowymi (10) i (11) tworzy tzw. *zagadnienie brzegowe teorii sprężystości*. Przybliżone rozwiązanie zagadnienia brzegowego teorii sprężystości otrzymać można przy użyciu metody elementów skończonych. W tym celu płaski obszar dzieli się na elementy skończone, najczęściej w postaci trójkątów lub czworokątów. Przykładowy sposób podziału obszaru dwuwymiarowego przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6. Przykładowy podział obszaru na elementy skończone: a) trójkątne; b) czworokątne

ELEMENTY TRÓJKĄTNE

W ramach niniejszej instrukcji uwaga została skupiona na trójkątnym elemencie skończonym o trzech węzłach. Na rys. 7 przedstawiono jeden element skończony o węzłach 1,2,3 z zaznaczonymi przemieszczeniami odpowiadającymi tym węzłom, rozkładając je na składowe o kierunku równoległym do osi x (u_1^e, u_2^e, u_3^e) oraz składowe o kierunku równoległym do osi y (v_1^e, v_2^e, v_3^e). Każdy z węzłów posiada zatem dwa stopnie swobody. Dodatkowo zaznaczono siły węzłowe $P_1^e, S_1^e, P_2^e, S_2^e, P_3^e, S_3^e$.



Rys. 7. Trójwęzłowy trójkątny element skończony

Związki pomiędzy siłami i przemieszczeniami można wyrazić za pomocą równania macierzowego [5]:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{Q}^e \quad (13)$$

gdzie:

$$\mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} u_1^e & v_1^e & u_2^e & v_2^e & u_3^e & v_3^e \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

$$\mathbf{Q}^e = \begin{bmatrix} P_1^e & S_1^e & P_2^e & S_2^e & P_3^e & S_3^e \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

natomiast $\mathbf{K}^e$ to macierz sztywności elementu skończonego.

W MES poszukiwane pola przemieszczeń wewnątrz elementu skończonego opisuje się za pomocą z góry założonych funkcji aproksymujących [6]. Należy zatem poczynić założenie, w jaki sposób przemieszczenie wewnątrz elementu będzie zależało od przemieszczeń w węzłach. W ramach typu elementu skończonego rozpatrywanego w niniejszej instrukcji zakłada się, że funkcje przemieszczeń w obrębie elementu $u^e = f_u(x,y)$, $v^e = f_v(x,y)$ są funkcjami linio- wymi:

$$\begin{aligned} u^e &= \alpha_1^e + \alpha_2^e x_1 + \alpha_3^e y_1 \\ v^e &= \alpha_4^e + \alpha_5^e x_1 + \alpha_6^e y_1 \end{aligned} \quad (16)$$

W takim wypadku przemieszczenia węzłów można określić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} u_1^e &= \alpha_1^e + \alpha_2^e x_1 + \alpha_3^e y_1 \\ u_2^e &= \alpha_1^e + \alpha_2^e x_2 + \alpha_3^e y_2 \\ u_3^e &= \alpha_1^e + \alpha_2^e x_3 + \alpha_3^e y_3 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} v_1^e &= \alpha_4^e + \alpha_5^e x_1 + \alpha_6^e y_1 \\ v_2^e &= \alpha_4^e + \alpha_5^e x_2 + \alpha_6^e y_2 \\ v_3^e &= \alpha_4^e + \alpha_5^e x_3 + \alpha_6^e y_3 \end{aligned} \quad (18)$$

Po rozwiązaniu układu równań (17) można zapisać:

$$\begin{aligned} \alpha_1^e &= \frac{1}{2A^e} \left[u_1^e (x_2 y_3 - x_3 y_2) + u_2^e (x_3 y_1 - x_1 y_3) + u_3^e (x_1 y_2 - x_2 y_1) \right] \\ \alpha_2^e &= \frac{1}{2A^e} \left[u_1^e (y_2 - y_3) + u_2^e (y_3 - y_1) + u_3^e (y_1 - y_2) \right] \\ \alpha_3^e &= \frac{1}{2A^e} \left[u_1^e (x_3 - x_2) + u_2^e (x_1 - x_3) + u_3^e (x_2 - x_1) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie A^e oznacza pole powierzchni elementu trójkątnego. Analogiczne rozwiązanie jest osią- gane przez rozwiązanie układu równań (18) [5]. Podstawiając wyznaczone współczynniki $\alpha_1^e - \alpha_3^e$ do równania (16) otrzymuje się następujące wyrażenia:

$$\begin{aligned} u^e &= N_1^e u_1^e + N_2^e u_2^e + N_3^e u_3^e \\ v^e &= N_1^e v_1^e + N_2^e v_2^e + N_3^e v_3^e \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 N_1^e &= \frac{1}{2A^e} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\
 N_2^e &= \frac{1}{2A^e} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\
 N_3^e &= \frac{1}{2A^e} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]
 \end{aligned} \tag{21}$$

to funkcje kształtu.

Zależność pomiędzy przemieszczeniami w obrębie elementu a przemieszczeniami w węzłach można zapisać w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \end{bmatrix} \tag{22}$$

Związek między odkształceniami i przemieszczeniami jest wyrażony w następujący sposób (patrz równanie (8)) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^e \\ v^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \end{bmatrix} \tag{23}$$

Warto zwrócić uwagę, że ze względu na liniowość funkcji kształtu ich pochodne mają stałe wartości. W konsekwencji analizowany typ elementu prowadzi do uzyskania stałej wartości odkształceń w obrębie elementu.

Oznaczając macierz pochodnych funkcji kształtu jako **B** można zapisać równanie określające związek pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami jako:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}^e \mathbf{u}^e \tag{24}$$

Energię sprężystą właściwą wyrazić można jako:

$$\Phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \tag{25}$$

Zatem energię sprężystą dla elementu dwuwymiarowego o grubości h można zapisać jako:

$$V = \frac{1}{2} \iint_{A^e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} h^e dx dy \tag{26}$$

Po podstawieniu zależności (3) i (24) otrzymuje się:

$$V = \frac{1}{2} \iint_{A^e} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e \mathbf{u}^e h^e dx dy \tag{27}$$

lub

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{eT} \left(\iint_{A^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e h^e dx dy \right) \mathbf{u}^e \quad (28)$$

Energia sprężysta może być również wyznaczona jako suma prac sił węzłowych:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{eT} \mathbf{u}^e \quad (29)$$

Po podstawieniu zależności (1) oraz uwzględnieniu, że macierz $\mathbf{K}^e$ jest symetryczna, otrzymuje się następujące wyrażenie:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (30)$$

Porównując energię wyznaczoną z zastosowaniem wzorów (28) i (30) otrzymywany jest wzór na macierz sztywności elementu:

$$\mathbf{K}^e = \iint_{A^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e h^e dx dy \quad (31)$$

Ze względu na stałość wielkości podcałkowych w przypadku analizowanego typu elementu skończonego macierz sztywności można zapisać jako:

$$\mathbf{K}^e = h^e \mathbf{A}^e \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e \quad (32)$$

Należy pamiętać, że w ogólnym przypadku wielkości podcałkowe są zależne od x oraz y i w związku z tym w celu wyznaczenia macierzy sztywności trzeba zastosować całkowanie numeryczne (jest to konieczne np. w przypadku elementu czworokątnego) [7]. Warto też zwrócić uwagę, że do rozwiązywania problemów w zakresie liniowej statyki zalecane jest stosowanie elementów o kwadratowych funkcjach kształtu.

Znając macierze sztywności wszystkich elementów skończonych dyskretyzujących analizowany obszar, tworzy się globalną macierz sztywności $\mathbf{K}$ całego układu. Procedura ta nazywana agregacją jest omówiona na przykładzie elementu prętowego w instrukcji dotyczącej tematu „Zastosowanie metody elementów skończonych do rozwiązywania układów prętowych” [8]. Dodatkowo należy ustalić sposób podparcia układu odbierając odpowiednie stopnie swobody (zakładając przemieszczenia równe zero dla wybranych stopni swobody). Można to zrealizować np. z zastosowaniem metody kary również opisaną w instrukcji [8].

Model dyskretny MES wymaga zastąpienia wszystkich obciążeń rozłożonych (powierzchniowych, objętościowych) przez równoważne siły węzłowe. W rezultacie otrzymywany jest globalny wektor sił węzłowych $\mathbf{Q}$, którego wymiar odpowiada liczbie stopni swobody układu.

Podstawowe równanie MES dla całego układu przyjmuje postać:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{Q} \quad (33)$$

Z podstawowego równania MES wyznacza się macierz niewiadomych, jaką jest wektor przemieszczeń węzłowych $\mathbf{u}$. W tym celu stosuje się jedną z numerycznych metod rozwiązywania układów równań. Po wyznaczeniu $\mathbf{u}$, w następnych etapach wyliczane są odkształcenia i naprężenia (równania (3) i (24)).

OPROGRAMOWANIE MES

W celu rozwiązania konkretnego zadania brzegowego z wykorzystaniem oprogramowania MES należy stworzyć model rozpatrywanego układu składający się z elementów skończonych. W rzeczywistym układzie mechanicznym wyodrębnia się części składowe, które modeluje się jako elementy jednowymiarowe (prętowe, belkowe), elementy dwuwymiarowe (płytowe, tarczowe, powłokowe, osiowosymetryczne) czy trójwymiarowe (bryłowe). W niniejszej instrukcji ograniczono się do elementów dwuwymiarowych (2D).

Większość dostępnych programów MES umożliwia zarówno tworzenie geometrii rozpatrywanego układu, jak i jej import z plików CAD. Model geometryczny jest pomocny w tworzeniu siatki elementów skończonych oraz może ułatwiać zadawanie obciążeń i warunków brzegowych.

Proces rozwiązywania zadania mechaniki z zastosowaniem oprogramowania MES może wyglądać jak poniżej. Zauważ, że kolejność działań jest tu nieco inna niż podana w poprzednim rozdziale – często stosowanym we współczesnych programach MES udogodnieniem jest możliwość zadawania obciążeń i warunków brzegowych na geometrii. W tym przypadku oprogramowanie zadba o to, by odpowiednio przenieść je na siatkę elementów skończonych.

Kolejne etapy to:

1. Utworzenie lub import geometrii konstrukcji.
2. Zdefiniowanie własności poszczególnych składowych konstrukcji: materiału, wymaganych własności geometrii (jak np. grubość tarczy w zadaniach 2D).
3. Zadanie obciążeń i warunków brzegowych.
4. Stworzenie siatki MES.
5. Przeprowadzenie analizy – uruchamiany jest odpowiedni moduł obliczeniowy.
6. Prezentacja wyników (mapy barwne, wartości w węzłach i inne).

PRZEBIEG ĆWICZENIA

Dla wybranych układów płaskich należy przeprowadzić obliczenia (wyznaczenie przemieszczeń, naprężeń i reakcji podporowych) przy użyciu programu metody elementów skończonych wskazanego przez prowadzącego.

OPRACOWANIE WYNIKÓW I WYTYCZNE DO SPRAWOZDANIA

Obliczenia należy przeprowadzić korzystając z pakietu programów do metody elementów skończonych wskazanego przez prowadzącego ćwiczenia.

Sprawozdanie powinno zawierać:

- I. Cel ćwiczenia.
- II. Opis rozwiązywanego zagadnienia i modelu numerycznego (z rysunkami).
- III. Wyniki obliczeń MES zgodnie z zaleceniami prowadzącego (w tym stosowne zrzuty ekranów).
- IV. Analizę wyników i wnioski.

Prowadzący może zmienić wymagania dotyczące sprawozdania.

PRZYKŁADOWE PYTANIA KONTROLNE

1. Do czego służy metoda elementów skończonych?
2. Co to jest macierz sztywności i w jakim wzorze występuje?
3. Co to są funkcje kształtu?
4. Co to są elementy skończone i jakie wielkości je opisują?
5. Jakich zasad należy przestrzegać w przypadku rozwiązywania zagadnienia metodą elementów skończonych?
6. Podaj prawo Hooke'a dla płaskiego stanu odkształcenia (lub płaskiego stanu naprężenia).

LITERATURA

1. Beluch W., Burczyński T., Fedeliński P., John A., Kokot G., Kuś W.: Laboratorium z wytrzymałości materiałów. Wyd. Politechniki Śląskiej, Skrypt nr 2285, Gliwice, 2002.
2. Bąk R., Burczyński T.: *Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego*, WNT, Warszawa 2001.
3. Szmelter J.: *Metoda elementów skończonych w mechanice*, PWN, Warszawa 1980.
4. Zienkiewicz O.C.: *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
5. Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłowski Z.: *Wytrzymałość materiałów tom II*, WNT, Warszawa 2000
6. Bijak-Żochowski M., Jaworski A., Krzesiński G., Zagrajek T.: *Mechanika materiałów i konstrukcji tom II*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2006.
7. Chandrupatla T., Belegundu A.: *Introduction to finite elements in engineering*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002.
8. Instrukcja do zajęć laboratoryjnych z wytrzymałości materiałów, temat: *Zastosowanie metody elementów skończonych do rozwiązywania układów prętowych*, Gliwice 2022.

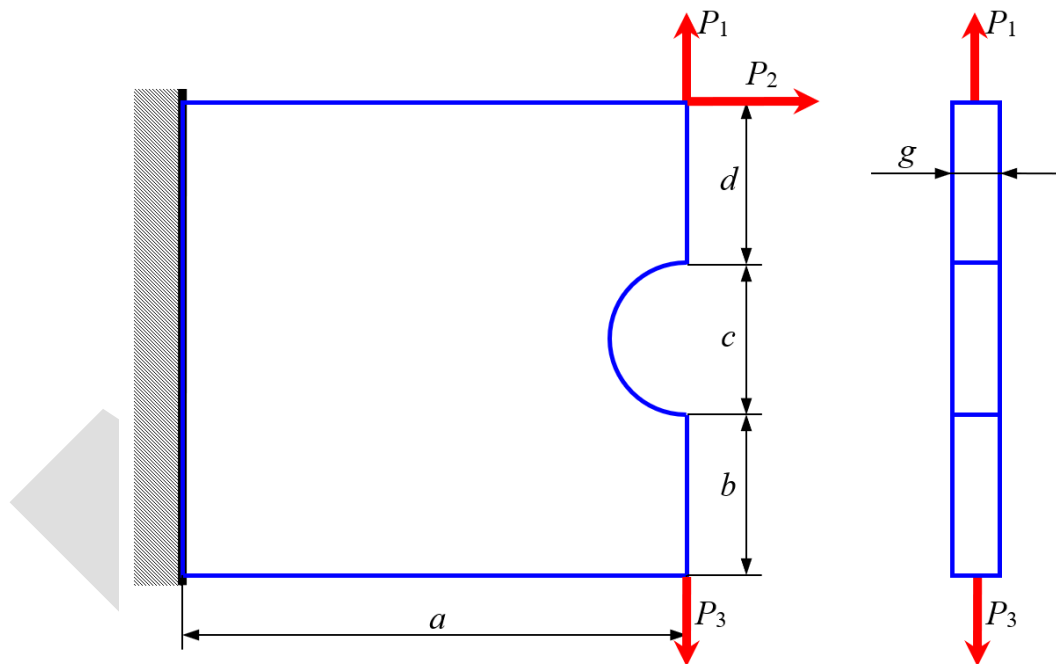
DODATEK – PRZYKŁADOWE ZADANIE

Rozpatrywana jest prostokątna tarcza, utwierdzona na jednym boku, z półkolistym wycięciem na boku przeciwnym (Rys. 8). Założono, że tarcza znajduje się w płaskim stanie naprężenia.

Tarcza jest obciążona siłami P_1 , P_2 i P_3 działającymi w płaszczyźnie tarczy. Dane dotyczące geometrii, obciążenia i materiału zaleca się przyjąć następująco:

$$\begin{array}{lll} a = 0.5 \text{ m} & g = 5 \text{ mm} & E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \\ b = 0.15 \text{ m} & P_1 = 1 \text{ kN} & \nu = 0.3 \\ c = 0.15 \text{ m} & P_2 = 5 \text{ kN} & \sigma_{dop} = 150 \text{ MPa} \\ d = 0.1 \text{ m} & P_3 = 2 \text{ kN} & \end{array}$$

Należy wyznaczyć rozkład przemieszczeń oraz naprężeń redukowanych układu w postaci barwnych map. Następnie zmieniając grubość elementów należy dobrać wymiary tarczy, dla których maksymalne naprężenia będą bliskie, ale nieprzekraczające wartości naprężeń dopuszczalnych σ_{dop} .



Rys. 8. Tarcza z wycięciem