



Katedra Mechaniki i Inżynierii Obliczeniowej
Wydział Mechaniczny Technologiczny
Politechnika Śląska

www.mio.polsl.pl

LABORATORIUM WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Zginanie ukośne

1. CEL ĆWICZENIA

Ćwiczenie ma na celu poglądowe przedstawienie zginania ukośnego i różnic pomiędzy zginaniem prostym a ukośnym oraz doświadczalną weryfikację wyprowadzonych teoretycznie zależności. W ramach ćwiczenia określone są ugięcia w belce zginanej ukośnie oraz położenie osi obojętnej.

2. WPROWADZENIE

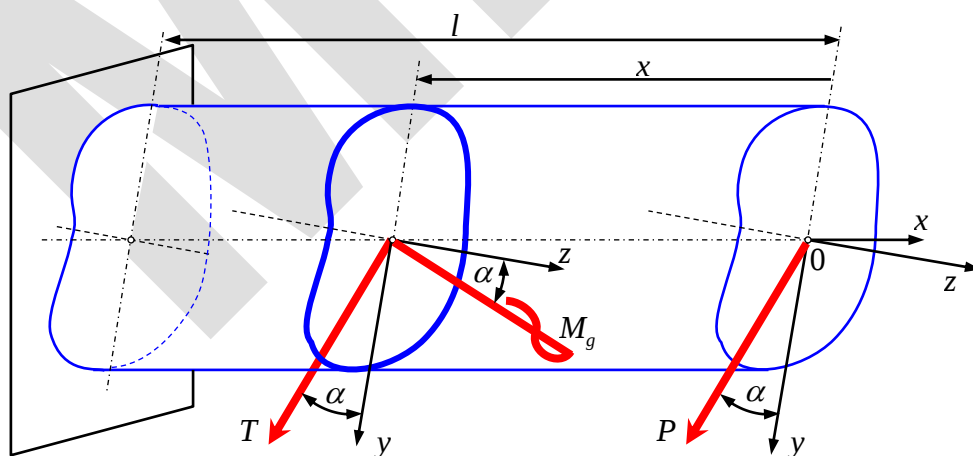
Zginanie proste (takie, w którym kierunek momentu gnącego pokrywa się z jedną z głównych centralnych momentów bezwładności przekroju belki zginanej) jest szczególnym przypadkiem zginania. Mamy z nim do czynienia, gdy przekrój belki zginanej jest przekrojem symetrycznym względem płaszczyzny zginania. W innym przypadku mamy do czynienia z tzw. zginaniem ukośnym, które można traktować jako superpozycję (złożenie) dwóch zginania prostych, w których kierunki wektorów momentów gnących pokrywają się z głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju.

3. PODSTAWY TEORETYCZNE

3.1 Naprężenia w zginaniu ukośnym

Zginaniem ukośnym nazywamy zginanie, w którym kierunek wektora momentu gnącego nie pokrywa się z kierunkiem żadnej z głównych centralnych osi bezwładności przekroju poprzecznego.

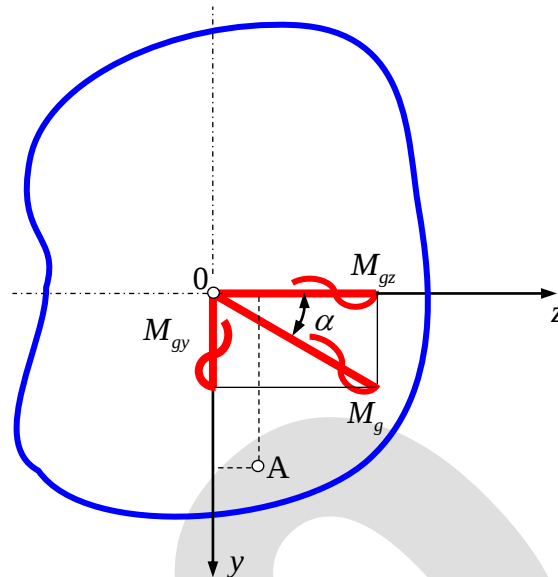
Rozpatrujemy belkę jednostronnie utwierdzoną i obciążoną siłą poprzeczną P na swobodnym końcu. Kierunek linii działania siły P jest nachylony pod kątem α do osi y . Oś y i z są głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju (rys. 1).



Rys. 1. Pręt zginany ukośnie

W przekroju odległym o x od swobodnego końca występują jako siły wewnętrzne: siła poprzeczna T oraz moment gnący $M_g = Px$, nachylony do osi z pod kątem α . Moment ten wywołuje zginanie ukośne.

Rzutując wektor momentu gnącego na osie układu otrzymuje się składowe momenty M_{gy} oraz M_{gz} (rys. 2).



Rys. 2. Przekrój pręta zginanego ukośnie

Każda ze składowych M_{gy} i M_{gz} wywołuje zginanie proste względem osi y lub z . W punkcie $A(y,z)$ można określić wartość naprężenia dokonując superpozycji dwóch zginanych prostych:

$$\sigma = \frac{M_{gy}z}{I_y} - \frac{M_{gz}y}{I_z} \quad (1)$$

Różne znaki w powyższej zależności wynikają z faktu, iż moment M_{gy} powoduje w pierwszej ćwiartce przyjętego układu współrzędnych yOz rozciąganie włókien belki (znak „+”), zaś moment M_{gz} powoduje w tejże ćwiartce ściskanie włókien belki (znak „-”).

Uwzględniając:

$$M_{gy} = M_g \sin \alpha = Px \sin \alpha \quad (2)$$

$$M_{gz} = M_g \cos \alpha = Px \cos \alpha$$

otrzymuje się:

$$\sigma = Px \left(\frac{z \sin \alpha}{I_y} - \frac{y \cos \alpha}{I_z} \right) \quad (3)$$

Oś obojętna zginania jest to miejsce geometryczne punktów, dla których naprężenia są równe zero. Przyrównując równanie (3) do zera otrzymuje się równanie linii obojętnej:

$$\frac{z_0 \sin \alpha}{I_y} - \frac{y_0 \cos \alpha}{I_z} = 0 \quad (4)$$

lub

$$y_0 = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha z_0 \quad (5)$$

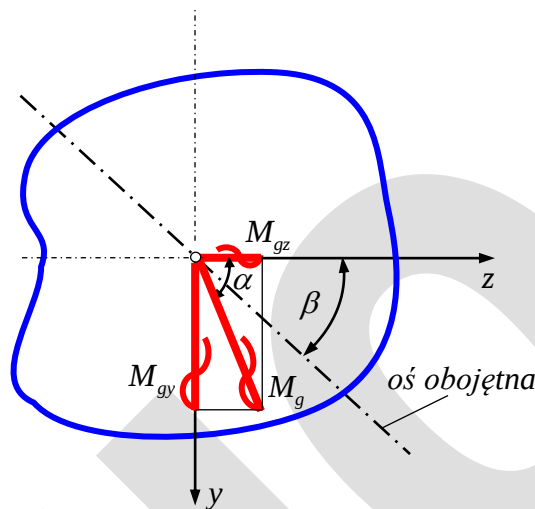
Podstawiając:

$$\frac{y_0}{z_0} = \operatorname{tg} \beta \quad (6)$$

otrzymuje się równanie linii obojętnej w postaci:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha \quad (7)$$

Kąt β w powyższych zależnościach jest kątem nachylenia osi obojętnej względem osi z . W ogólności oś obojętna nie pokrywa się z linią działania wektora momentu gnącego, choć przechodzi przez środek ciężkości przekroju (rys. 3).



Rys. 3. Położenie osi obojętnej w zginaniu ukośnym

Ponieważ I_z oraz I_y mają wartości dodatnie, to kąty β i α mają te same znaki. Ponadto, jeśli $I_z > I_y$ to $\beta > \alpha$, zaś jeśli $I_z < I_y$, to $\beta < \alpha$. Wynika z tego, że oś obojętna leży zawsze pomiędzy linią działania wektora momentu gnącego a główną centralną osią bezwładności odpowiadającą minimalnemu momentowi bezwładności przekroju.

3.2 Ugięcie belki w zginaniu ukośnym

Podobnie jak przy wyznaczaniu naprężeń, wyznaczając ugięcia również można zastosować zasadę superpozycji, rozkładając moment gnący na dwie składowe pokrywające się z głównymi centralnymi osiami bezwładności. Dla każdego ze zginających prostych można wyznaczyć odpowiednie ugięcia w kierunkach y i z .

Całkowite przemieszczenie określa się ze wzoru:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} \quad (8)$$

Ugięcia składowe można określić wykorzystując równanie różniczkowe osi ugiętej:

$$EIy'' = -M_g \quad (9)$$

Dla belki utwierdzonej jak na rys. 1 warunki brzegowe są określone równościami:

$$y(x=l) = 0; \quad y'(x=l) = 0 \quad (10)$$

Składowe ugięcia w przekroju odległym o x od swobodnego końca belki wynoszą (dla przyjętego układu współrzędnych jak na rys. 1):

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{P \cos \alpha}{6EI_z} (x^3 - 3l^2x + 2l^3) \\ f_z &= -\frac{P \sin \alpha}{6EI_y} (x^3 - 3l^2x + 2l^3) \end{aligned} \quad (11)$$

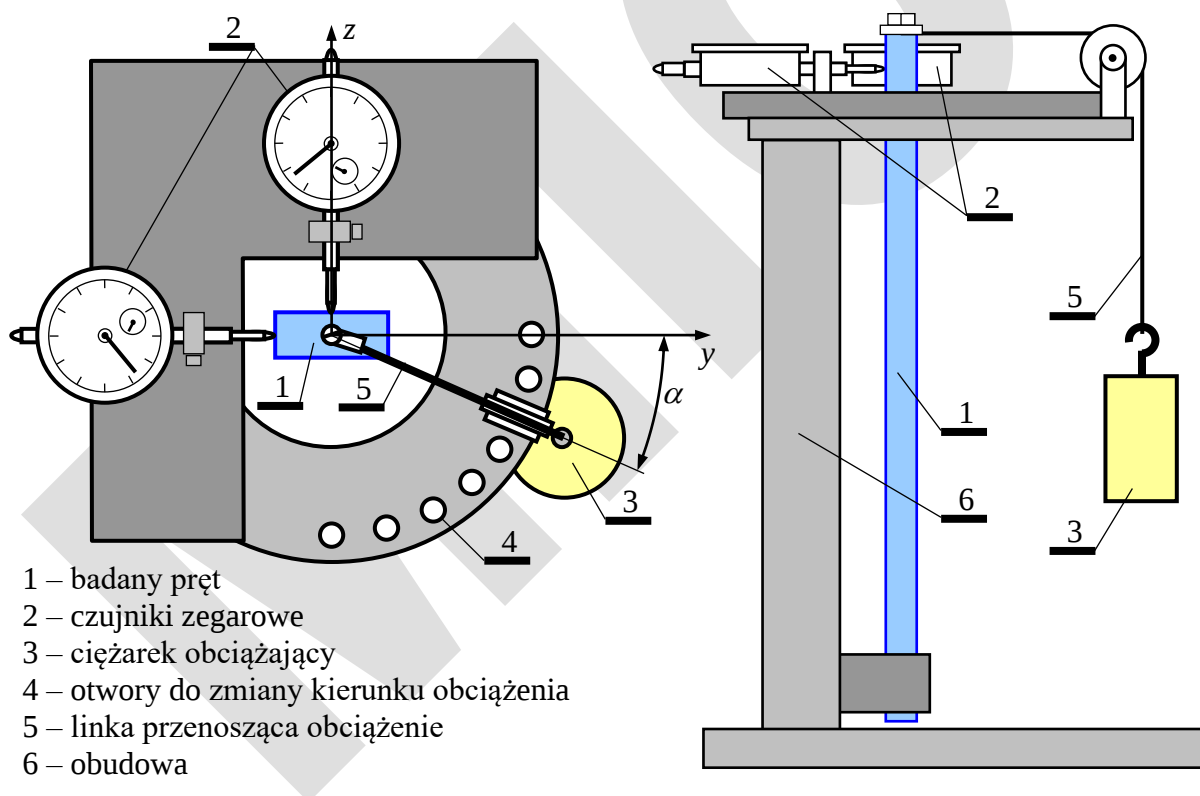
Dla swobodnego końca ($x=0$) ugięcia wynoszą:

$$\begin{aligned} f_{y0} &= \frac{P \cos \alpha}{3EI_z} l^3 \\ f_{z0} &= -\frac{P \sin \alpha}{3EI_y} l^3 \end{aligned} \quad (12)$$

4. PRZEBIEG ĆWICZENIA

Ćwiczenie przeprowadzane jest na stanowisku (rys. 4), na którym w sztywnej obudowie utwierdzono jednym końcem belkę o przekroju prostokątnym. Należy dokonać pomiarów belki, zgodnie wymaganiami zawartymi w protokole.

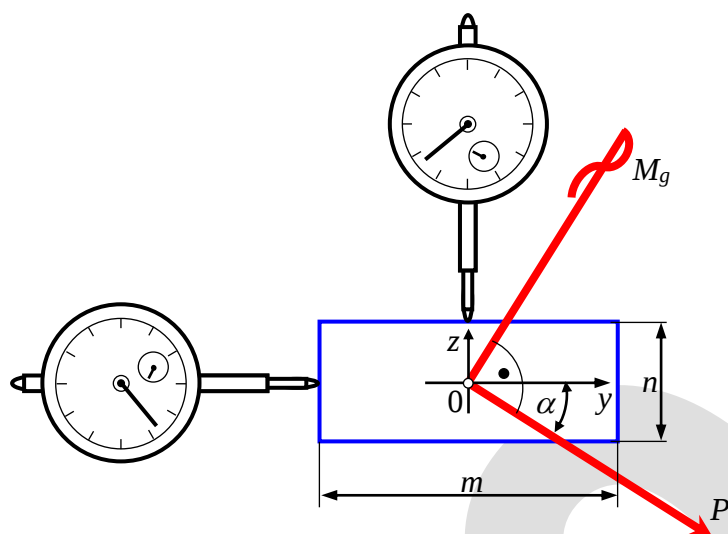
Do swobodnego końca można przyłożyć obciążenie w postaci siły poprzecznej. Siłę tę można przykładać w płaszczyźnie przekroju poprzecznego w zakresie kąta α od 0° do 90° co 15° , wywołując zginanie proste lub ukośne.



Rys. 4. Stanowisko do zginania ukośnego

Należy przyjąć układ współrzędnych jak na rys. 4 i rys. 5 – dla tak przyjętego układu współrzędnych właściwe są znaki we wzorze (1) i następnych. Należy zwrócić uwagę na fakt, czy dla danego kąta α składowa przemieszczenia w kierunku danej osi jest zgodna ze zwrotem tej osi. W przeciwnym przypadku należy uwzględnić, iż jest to przemieszczenie ujemne.

Przyjmując stałą wartość obciążenia należy obciążyć belkę po kolei dla wszystkich siedmiu możliwych położeń ciężarka obciążającego (dla $\alpha = 0^\circ$ oraz $\alpha = 90^\circ$ występuje zginanie proste). Wartości składowych przemieszczeń f_y i f_z należy zamieścić w protokole pomiarowym. Wymienione w niniejszym akapicie czynności należy wykonać jeszcze dwukrotnie, za każdym razem przyjmując inną wartość obciążenia.



Rys. 5. Położenie wektora siły i wektora momentu gnącego w przekroju

5. OPRACOWANIE WYNIKÓW I WYTICZNE DO SPRAWOZDANIA

Sprawozdanie powinno zawierać:

- I. Cel ćwiczenia
- II. Wstęp teoretyczny
- III. Rysunek stanowiska pomiarowego z zaznaczonymi wymiarami, osiami i przykładowym kątem α
- IV. Część obliczeniową, w której należy **dla każdej** przyjętej wartości obciążenia:
 1. Wyliczyć dla poszczególnych kątów α całkowite przemieszczenie przekroju, w którym są przyłożone czujniki przemieszczeń korzystając z pomiarów składowych przemieszczeń f_y i f_z .
 2. Wyliczyć dla poszczególnych kątów α , korzystając z zależności analitycznych, składowe przemieszczenia i całkowite przemieszczenie przekroju, w którym są przyłożone czujniki przemieszczeń. Należy w tym celu przyjąć dla belki $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{MPa}$.
 3. Wyliczyć dla poszczególnych kątów α kąty nachylenia β osi obojętnej.
 4. Narysować dla siły działającej pod kątem $\alpha = 30^\circ$ położenie osi obojętnej w przekroju poprzecznym belki.
 5. Narysować wykresy zależności f_y od kąta α oraz f_z od kąta α (w obydwu przypadkach wykres ciągły dla zależności analitycznej oraz punktowy dla pomiarów).
- V. Wnioski z ćwiczenia.

6. PRZYKŁADOWE PYTANIA KONTROLNE

1. Co to jest zginanie ukośne?
2. Jak wyznaczamy naprężenia w zginaniu ukośnym?
3. Co to jest oś obojętna?
4. Jak jest położona oś obojętna względem linii działania momentu gnącego w zginaniu ukośnym?
5. Wyprowadzić wzór na oś obojętną w zginaniu ukośnym.
6. Jak wyznaczamy teoretycznie ugięcie w zginaniu ukośnym?
7. Opisać przebieg ćwiczenia.

7. LITERATURA

1. Beluch W., Burczyński T., Fedeliński P., John A., Kokot G., Kuś W.: *Laboratorium z wytrzymałości materiałów*. Wyd. Politechniki Śląskiej, Skrypt nr 2285, Gliwice, 2002.
2. Bąk R., Burczyński T.: *Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego*, WNT, Warszawa 2001.
3. Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z.: *Wytrzymałość materiałów*, t. I-II, WNT, Warszawa 1996-97.
4. Zielnica J.: *Wytrzymałość materiałów*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1996.



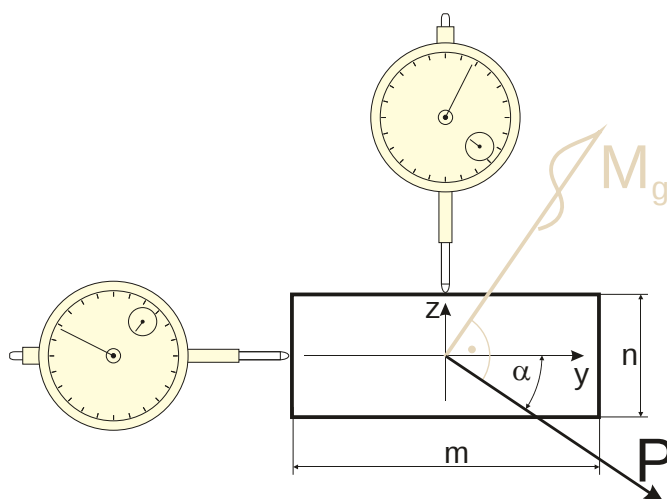
PROTOKÓŁ Z ĆWICZENIA

ZGINANIE UKOŚNE

Kierunek: _____ Grupa: _____ Sekcja: _____

Data wykonania ćwiczenia: _____

Prowadzący: _____ Podpis prow. _____



Długość belki (l) [mm]	
Odl. swobodnego końca belki od przekroju, w którym mierzone są przem. (x) [mm]	
Wysokość belki (n) [mm]	
Szerokość belki (m) [mm]	

Siła P [N]			Siła P [N]			Siła P [N]		
kąt α [°]	f_y [mm]	f_z [mm]	kąt α [°]	f_y [mm]	f_z [mm]	kąt α [°]	f_y [mm]	f_z [mm]
0			0			0		
15			15			15		
30			30			30		
45			45			45		
60			60			60		
75			75			75		
90			90			90		