



Instytut Mechaniki i Inżynierii Obliczeniowej
Wydział Mechaniczny Technologiczny
Politechnika Śląska



www.imio.polsl.pl



fb.com/imiopolsl



twitter.com/imiopolsl

LABORATORIUM WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Badania doświadczalne płyty kołowej osiowsymetrycznej

1. CEL ĆWICZENIA

- ♦ Zapoznanie się z podstawami teorii płyt cienkich.
- ♦ Zapanowanie się z rozwiązaniem analitycznym przemieszczeń, odkształceń i naprężeń płyty kołowej obciążonej symetrycznie.
- ♦ Doświadczalne wyznaczenie przemieszczeń i naprężeń płyty.

2. WPROWADZENIE

Płytę można zdefiniować jako płaski element konstrukcyjny, którego dwa wymiary dominują nad trzecim i który jest obciążony siłami prostopadłymi do płaszczyzny środkowej. Rozkład naprężeń w płycie nie jest równomierny, zaś układ sił wewnętrznych w przekroju poprzecznym płyty składa się z sił poprzecznych i par sił wywołujących zginanie lub skręcanie. Ze względu na kształt konturu płyty w jej płaszczyźnie środkowej płyty można podzielić na kołowe, prostokątne, trójkątne i inne.

W analizie płyt przyjmuje się następujące założenia upraszczające:

- Punkty położone przed odkształceniem na normalnej do powierzchni środkowej płyty, po odkształceniu również się na niej znajdują (*hipoteza Kirchhoffa*). Hipoteza ta jest analogiczna do hipotezy płaskich przekrojów w przypadku teorii zginania prętów.
- W przypadku małych ugięć płyty w porównaniu z jej grubością, odkształcenia liniowe i kątowe występujące w jej powierzchni środkowej są pomijalne. Jest to jednoznaczne z pominięciem naprężeń normalnych i stycznych w tej powierzchni.
- Naprężenia normalne w przekrojach równoległych do płaszczyzny środkowej są pomijalne w porównaniu z naprężeniami normalnymi w przekrojach poprzecznych. Inaczej mówiąc, poszczególne warstwy płyty nie wywierają na siebie nacisków normalnych.
- Płyta jest wykonana z materiału liniowosprężystego.

Płyty kołowe o stałej grubości obciążone symetrycznie, będące przedmiotem niniejszego ćwiczenia, stanowią ważną grupę elementów często spotykanych w konstrukcjach maszyn. Należą do nich pokrywy i dna zbiorników.

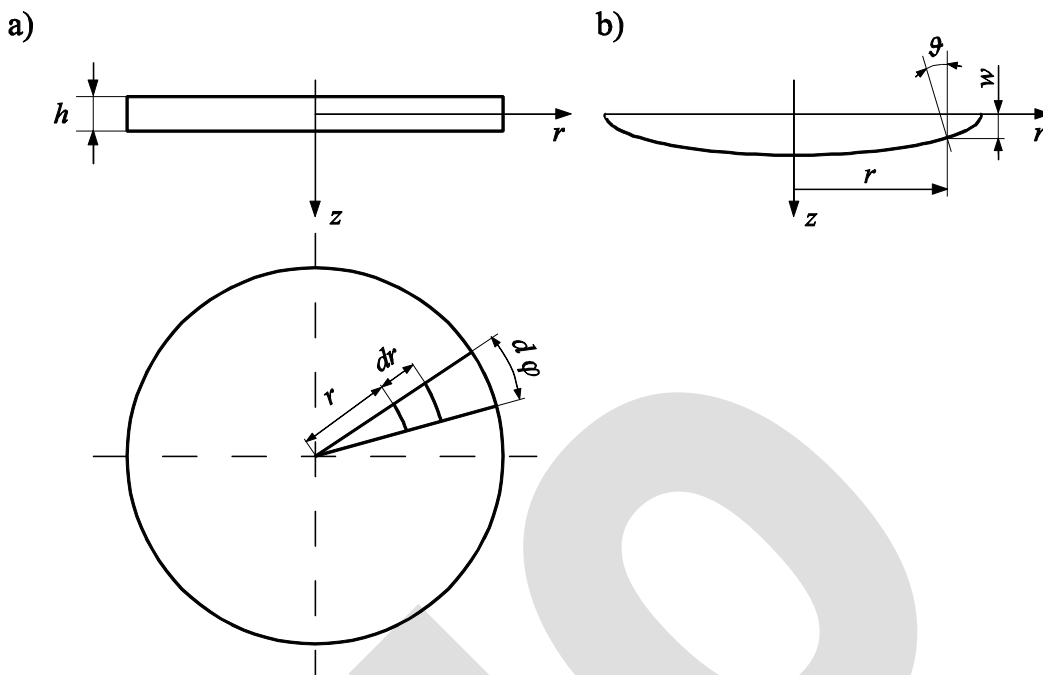
3. PODSTAWY TEORETYCZNE

3.1 Podstawowe zależności teorii płyt kołowych osiowosymetrycznych

W przypadku płyt kołowych obciążonych osiowosymetrycznie obciążenie zewnętrzne q , przemieszczenia w i siły wewnętrzne są funkcjami jednej zmiennej – promienia r – określającego jednoznacznie położenie danego punktu na płaszczyźnie środkowej płyty. Zakłada się, że grubość płyty jest stała i wynosi h (rys. 1a).

Kształt płaszczyzny środkowej płyty po odkształceniu opisany jest funkcją $w(r)$. W walcowym układzie współrzędnych (r, φ, z) między ugięciem $w(r)$ a kątem ugięcia $\vartheta(r)$ (rys. 1b) zachodzi relacja:

$$\vartheta = -\frac{dw}{dr}. \quad (1)$$



Rys. 1. Schemat płyty: a) płyta w walcowym układzie współrzędnych, b) powierzchnia ugięcia płyty

Na infinitezymalny element płyty działają następujące siły wewnętrzne (rys. 2):

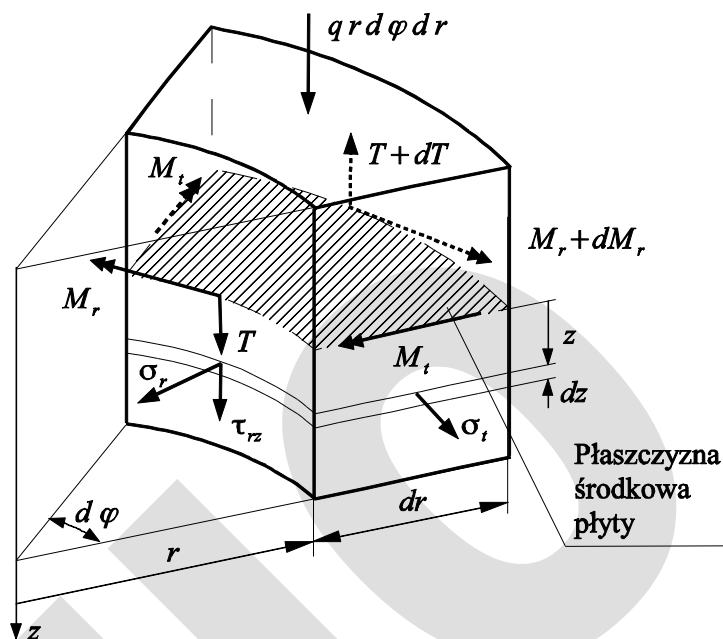
- obwodowy moment gnący o natężeniu M_t (w przekroju płyty przechodzącym przez jej oś),
- promieniowy moment gnący o natężeniu M_r (w przekroju prostopadłym do promienia),
- siła poprzeczna o natężeniu T (w przekroju prostopadłym do promienia; siła ta działa w kierunku równoległym do osi z).

Wymienione siły wewnętrzne odnoszą się do jednostki długości linii środkowej rozpatrywanego przekroju płyty. Jednostką natężenia momentów jest [N], natomiast jednostką natężenia siły poprzecznej jest [N/m]. Jednostką obciążenia zewnętrznego q jest [N/m²].

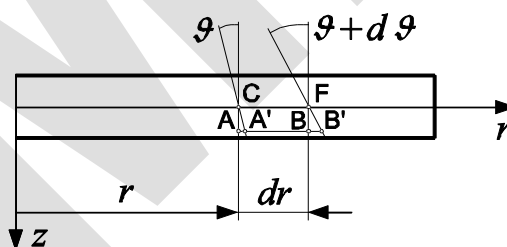
Jeśli pominie się działanie siły T można stwierdzić, że w warstwie o grubości dz , oddległej od płaszczyzny środkowej o z , panuje płaski osiowosymetryczny stan naprężenia określony naprężeniami głównymi promieniowymi σ_r oraz obwodowymi σ_t . Naprężenia te (oraz odpowiadające im odkształcenia ε_r i ε_t) są funkcjami zmiennych r i z . Aby wyrazić wymienione odkształcenia za pomocą kąta ugięcia ϑ należy rozpatrzyć dwie linie normalne do płaszczyzny środkowej płyty oddległe od osi płyty o r i $(r + dr)$, pokazane na rys. 3. W wyniku odkształcenia płyty punkty A i B oddległe od płaszczyzny środkowej o $z = CA = FB$ przemieściły się w położenie odpowiednio A' i B'. Przeszacowania te spowodowały następujące odkształcenia:

$$\varepsilon_r = \frac{BB' - AA'}{AB} = \frac{(\vartheta + d\vartheta)z - \vartheta z}{dr} = \frac{d\vartheta}{dr} z, \quad (2)$$

$$\varepsilon_t = \frac{(r + AA')2\pi - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{(r + \vartheta z) - r}{r} = \frac{\vartheta}{r} z. \quad (3)$$



Rys. 2. Infinitesimalny wycinek płyty



Rys. 3. Ilustracja wyznaczania odkształceń w punkcie płyty

Korzystając z powyższych zależności oraz uogólnionego prawa Hooke'a określa się związki pomiędzy naprężeniami a kątem φ :

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t) = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right), \quad (4)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t + \nu \varepsilon_r) = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right). \quad (5)$$

W powyższych równaniach E oznacza moduł Younga materiału, natomiast ν - liczbę Poissona.

Aby wycinek płyty pozostawał w równowadze muszą być spełnione następujące zależności pomiędzy momentami gnącymi a składowymi naprężen:

$$M_r r d\varphi = r d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz, \quad M_t dr = dr \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz. \quad (6)$$

Wstawiając powyższe równania do zależności (4) i (5) oraz obliczając odpowiednie całki momenty gnące można wyrazić funkcjami kąta ugięcia:

$$M_r = D \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \nu \frac{\vartheta}{r} \right), \quad (7)$$

$$M_t = D \left(\frac{\vartheta}{r} + \nu \frac{d\vartheta}{dr} \right). \quad (8)$$

W powyższych równaniach D oznacza sztywność płyty:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (9)$$

Zmiana współrzędnej r o wartość dr powoduje przyrost siły poprzecznej i momentu gnącego promieniowego odpowiednio o dT i dM_r (rys. 3). Dla wyodrębnionego fragmentu płyty można zapisać następujące warunki równowagi:

- suma rzutów wszystkich sił na oś z jest równa zero:

$$(T + dT)(r + dr)d\varphi - Tr d\varphi - qr d\varphi dr = 0 \Leftrightarrow qr = \frac{d(Tr)}{dr}, \quad (10)$$

- suma momentów wszystkich sił względem osi leżącej w płaszczyźnie środkowej, stycznej do okręgu o promieniu r jest równa zero:

$$\begin{aligned} (M_r + dM_r)(r + dr)d\varphi - M_r r d\varphi - q dr d\varphi \frac{dr}{2} \\ - M_t d\varphi dr + (T + dT)(r + dr)d\varphi dr = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

W równaniu (11) uwzględniono, że dla małego kąta jego sinus jest równy w przybliżeniu temu kątowi, tzn.

$$2M_t \sin \frac{d\varphi}{2} dr \approx 2M_t \frac{d\varphi}{2} dr = M_t d\varphi dr. \quad (12)$$

W wyniku uporządkowania powyższego równania oraz odrzucenia małych wyższego rzędu otrzymuje się:

$$M_t - \frac{d}{dr}(M_r r) = Tr. \quad (13)$$

Korzystając z powyższego równania oraz równań (7) i (8) można uzyskać równanie różniczkowe kątów ugięcia w płycie kołowej:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\vartheta r) \right] = -\frac{T}{D}. \quad (14)$$

W wyniku dwukrotnego scałkowania równania (14) i uwzględnienia warunków brzegowych otrzymuje się kąt ugięcia ϑ . Następnie korzystając z równania (1) oraz uwzględniając warunki brzegowe otrzymuje się równanie powierzchni ugiętej $w(r)$.

Znając kąt ϑ można wyznaczyć momenty M_r i M_t za pomocą równań (7) i (8). Dodatkowo korzystając z równań (4) i (5) można wyznaczyć naprężenia normalne:

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3} z, \quad \sigma_t = \frac{12M_t}{h^3} z. \quad (15)$$

Największe naprężenia co do bezwzględnej wartości występują w warstwach skrajnych płyty, tzn. dla $z = \pm h/2$ i wynoszą:

$$\sigma_r^{\max} = \frac{6M_r}{h^2}, \quad \sigma_t^{\max} = \frac{6M_t}{h^2}. \quad (16)$$

Występujące we wzorach (15) i (16) czynniki $h^3/12$ oraz $h^2/6$ są równe odpowiednio momentowi bezwładności przekroju względem osi obojętnej i wskaźnikowi wytrzymałości na zginanie belki o przekroju prostokątnym o długości podstawy równej 1 i wysokości równej h .

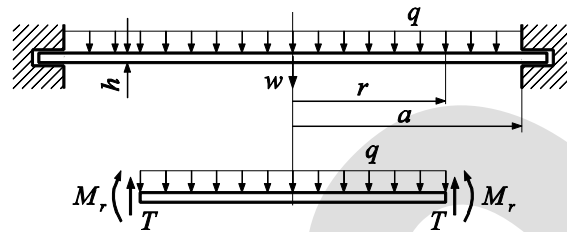
Siła poprzeczna o natężeniu T wywołuje w przekrojach walcowych płyty naprężenia styczne τ_{rz} , których rozkład jest taki sam jak w poprzecznym przekroju belki prostokątnej (paraboliczny w kierunku grubości płyty). Największe naprężenia styczne występują w miejscu przecięcia przekroju z powierzchnią środkową płyty (tzn. dla $z = 0$) i wynoszą

$$\tau_{rz}^{\max} = \frac{3}{2} \frac{T}{h}. \quad (17)$$

Przykład wyprowadzenia rozwiązania dla płyty sztywno utwierdzonej zostanie opisany w kolejnym podrozdziale.

3.2 Rozwiązanie dla płyty obciążonej równomiernie i sztywno utwierdzonej na brzegu

Rozpatrywana jest płyta kołowa o grubości h i promieniu zewnętrznym a , poddana równomiernie rozłożonemu obciążeniu o natężeniu q (rys. 4). Płyta jest sztywno utwierdzona na brzegu.



Rys. 4. Płyta obciążona równomiernie i sztywno utwierdzona na brzegu

W przekroju walcowym o promieniu r natężenie T siły poprzecznej wyznacza się z warunku równowagi krążka o promieniu r :

$$T 2\pi r = q\pi r^2 \Leftrightarrow T = \frac{qr}{2}. \quad (18)$$

W wyniku podstawienia T do równania (14) otrzymuje się:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\vartheta r) \right] = -\frac{qr}{2D}. \quad (19)$$

Po dwukrotnym scałkowaniu otrzymuje się kąt ugięcia:

$$\vartheta = -\frac{qr^3}{16D} + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (20)$$

W środku płyty, dla $r = 0$, kąt ugięcia $\vartheta = 0$. Wynika z tego, że $C_2 = 0$. Dla $r = a$ (na brzegu płyty) kąt również jest równy 0. Wynika stąd, że $C_1 = qa^2/(8D)$. Wyrażenie na kąt ugięcia przyjmuje zatem postać:

$$\vartheta = \frac{qr}{16D} (a^2 - r^2). \quad (21)$$

Podstawiając powyższe równanie do zależności (1) i całkując otrzymuje się:

$$w = \frac{q}{16D} \left(\frac{r^4}{4} - \frac{a^2 r^2}{2} \right) + C_3. \quad (22)$$

Stałą C_3 otrzymuje się z warunku $w = 0$ dla $r = a$. Stała ta wynosi $C_3 = qa^4/(64D)$.

Wyrażenie na ugięcie płyty przyjmuje ostatecznie postać:

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2. \quad (23)$$

Podstawiając zależność (21) do wzorów (7), (8) oraz różniczkując otrzymuje się wyrażenia na momenty zginające:

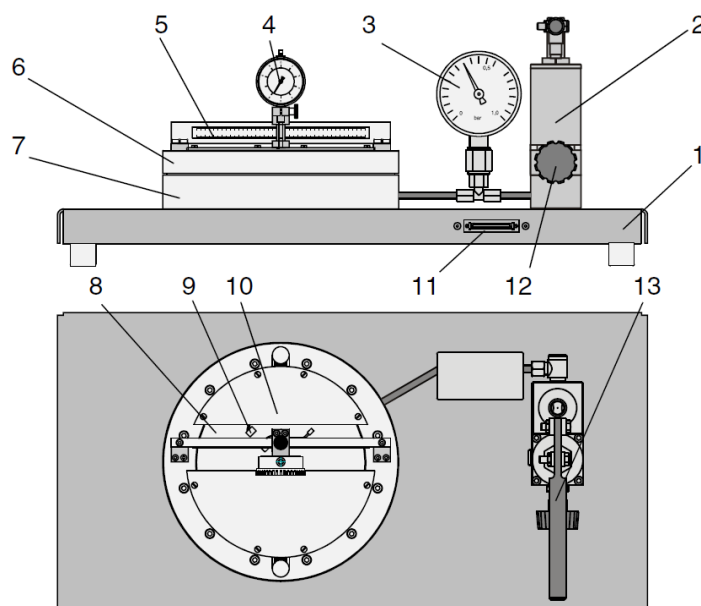
$$M_r = \frac{q}{16} [(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2], \quad (24)$$

$$M_t = \frac{q}{16} [(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2]. \quad (25)$$

Zależności (16), (24) i (25) pozwalają na wyznaczenie przemieszczeń i naprężeń normalnych w dowolnym punkcie płyty.

4. STANOWISKO POMIAROWE

Do wykonania pomiarów wykorzystywane jest stanowisko GUNT FL 120. Stanowisko składa się komory wypełnionej olejem zamkniętej od góry płytą kołową. W komorze panuje ciśnienie równoważne sile rozłożonej równomiernie na powierzchni płyty q . W wyniku działania siły płyta odkształca się. Stanowisko pozwala na pomiar ugięcia płyty za pomocą czujnika zegarowego, oraz naprężeń promieniowych i obwodowych w wybranych punktach płyty za pomocą czujników tensometrycznych [3]. Elementy składowe stanowiska zostały pokazane na rys. 5 i opisane w tabeli 1.



Rys. 5. Schemat stanowiska pomiarowego

Tabela 1. Opis elementów składowych stanowiska pokazanego na rysunku 5

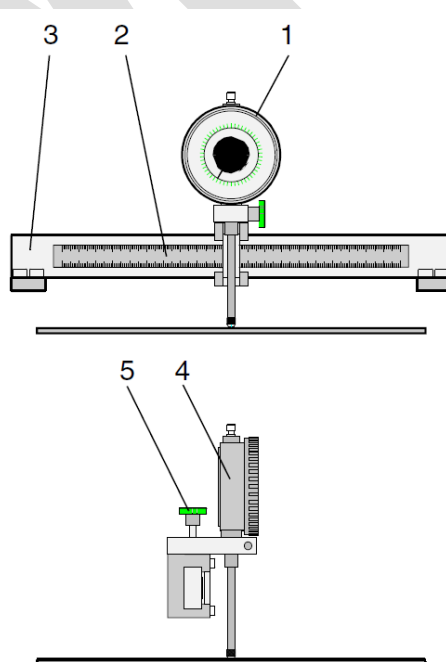
Nr	Opis	Nr	Opis
1	Podstawa	7	Komora
2	Pompa hydrauliczna	8	Płyta kołowa
3	Manometr	9	Czujnik tensometryczny
4	Czujnik zegarowy	10	Ośłona ochronna
5	Trawersa z podziałką	11	Gniazdo połączeniowe
6	Pierścień mocowania płyty	12	Pokrętło zaworu
		13	Dźwignia pompy

Wymaganą wartość ciśnienia oleju ustala się przez zamknięcie zaworu 12 oraz wywołanie nacisku na dźwignię pompy 13. Wartość ciśnienia wskazywana przez manometr jest wyrażona w barach ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$).

UWAGA:

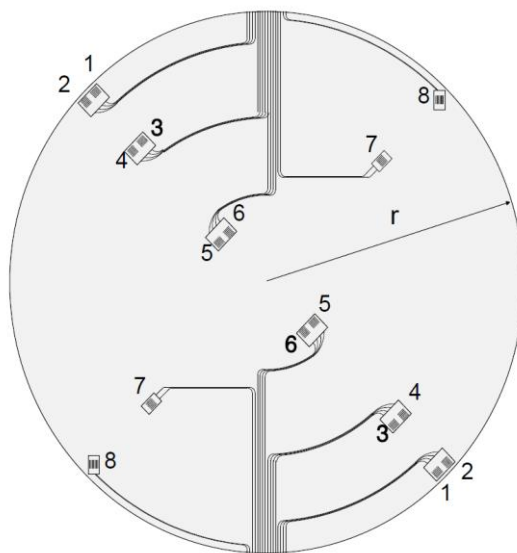
1. **Niedopuszczalne jest przekroczenie wartości ciśnienia 0,6 bar. Spowoduje to trwałe odkształcenie płyty i nieprawidłowe działanie stanowiska!**
2. **Przed wykonaniem pomiarów oraz po ich wykonaniu należy dopilnować aby pokrętło zaworu było odkręcone (zawór otwarty) a manometr wskazywał brak ciśnienia oleju.**

Do pomiaru ugięcia płyty służy trawersa z uchwytem, w którym zamocowany jest czujnik zegarowy. Uchwyt czujnika można przesuwając wzdłuż trawersy ustalać odległość punktu, w którym mierzone jest ugięcie od środka płyty. Do odmierzania odległości służy podziałka milimetrowa znajdująca się na trawersie. Odpowiednie elementy składowe pokazano na rys. 6.



Rys. 6. Schemat trawersy z czujnikiem zegarowym: 1 – obrotowa tarcza czujnika zegarowego, 2 – podziałka milimetrowa, 3 – trawersa, 4 – czujnik zegarowy, 5 – pokrętło do ustalania pozycji czujnika

Stanowisko pozwala również na pomiar naprężeń w wybranych punktach płyty za pomocą czujników tensometrycznych rozmieszczonych na powierzchni płyty (rys. 7) [3]. Oznaczenie tensometrów oraz odpowiadający im kierunek mierzonego naprężenia i odległość od środka płyty przedstawiono w tabeli 2. Wartości mierzonych odkształceń wyrażone są w $\mu\text{m}/\text{m}$.

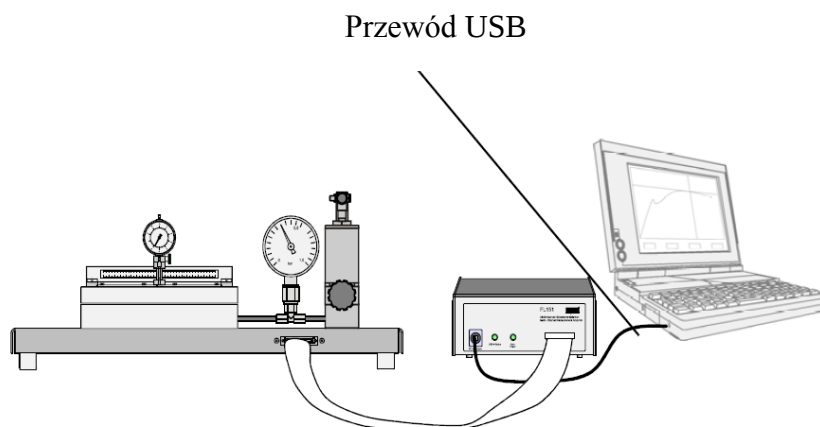


Rys. 7. Rozmieszczenie czujników tensometrycznych na powierzchni płyty

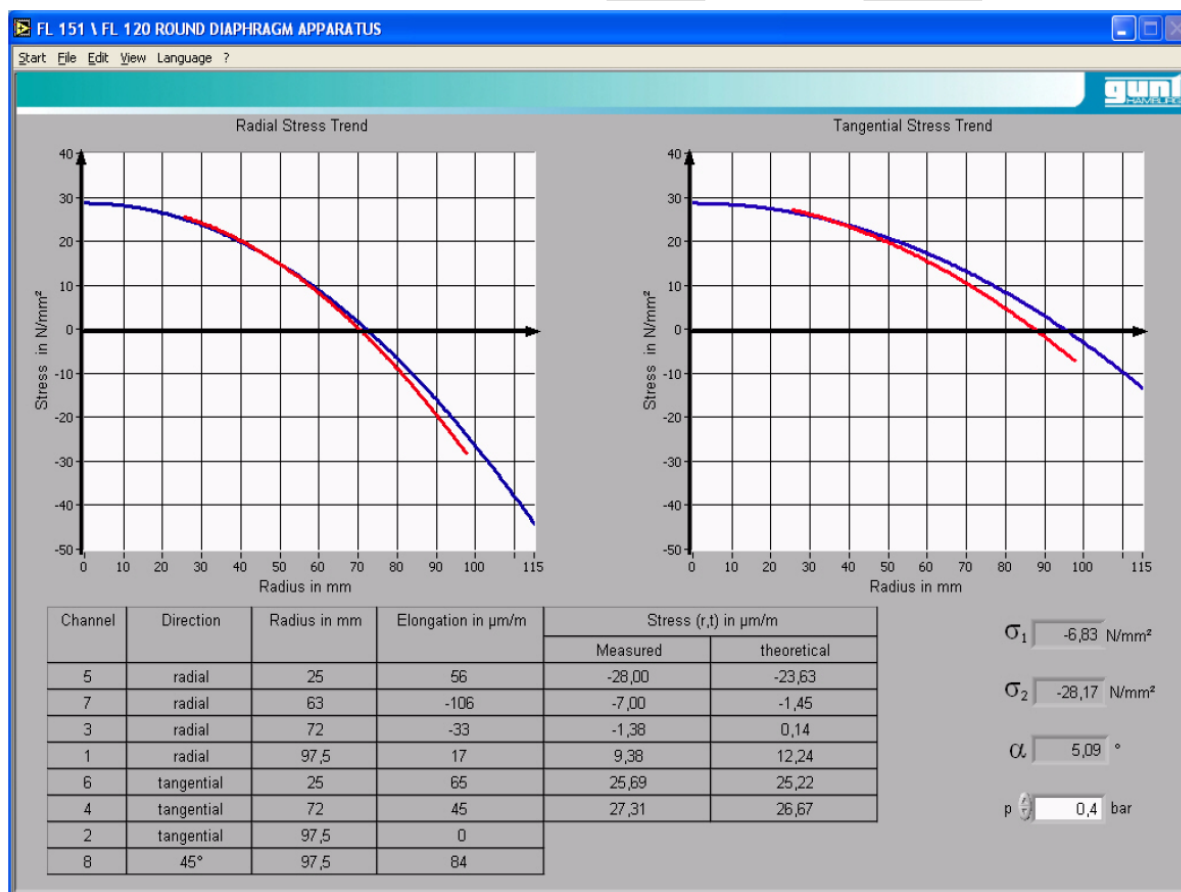
Tabela 2. Opis tensometrów pokazanych na rysunku 7

Nr tensometru	Odległość od osi płyty, mm	Kierunek
1	97,5	promieniowy
2	97,5	obwodowy
3	72	promieniowy
4	72	obwodowy
5	25	promieniowy
6	25	obwodowy
7	63	promieniowy
8	97,5	kąt 45° pomiędzy kierunkiem promieniowym i obwodowym

Stanowisko połączone jest z jednostką pomiarową GUNT FL 151, która przesyła wyniki pomiarów tensometrycznych do komputera (rys. 8). Do obróbki wyników pomiarów służy program komputerowy, którego okno pokazano na rys. 9. Program ten umożliwia m.in. wizualne porównanie wykresów zależności naprężeń promieniowych (wykres *Radial Stress Trend* na rys. 9) i obwodowych (wykres *Tangential Stress Trend*) od promienia r wyznaczonych doświadczalnie (linie koloru czerwonego) oraz analitycznie (linie koloru granatowego).



Rys. 8. Urządzenia GUNT FL 120 oraz FL 151 połączone z komputerem



Rys. 9. Okno aplikacji służącej do pomiaru i wizualizacji pomiarów odkształceń i naprężeń

5. PRZEBIEG ĆWICZENIA

Parametry układu mają następujące wartości:

- Moduł Younga materiału płyty (aluminium) $E = 70 \text{ GPa}$,
- liczba Poissona materiału $\nu = 0.3$,
- promień płyty $a = 115 \text{ mm}$,
- grubość płyty $h = 3 \text{ mm}$.

5.1 Pomiar ugięcia płyty

W tej części ćwiczenia należy zmierzyć wartości przemieszczeń płyty $w(r, q)$ pod wpływem ciśnienia. Wartości odległości wybranych punktów pomiarowych od osi płyty oraz wartości ciśnienia należy ustalić z prowadzącym. Należy pamiętać o tym, aby nie przekroczyć wartości dopuszczalnej ciśnienia (0.6 bar). Wyniki pomiarów doświadczalnych $w_{dośw}$ oraz obliczeń analitycznych w_{an} (wzór (23)) należy zapisać w tabeli 3. We wszystkich obliczeniach należy stosować spójny układ jednostek, np. [N, mm, MPa].

Tabela 3. Wyniki pomiarów ugięcia płyty $w(r, q)$ [mm]

Odległość punktu od osi płyty r [mm]		Wartość obciążenia q [MPa]		
	$w_{dośw}$			
	w_{an}			
	$w_{dośw}$			
	w_{an}			
	$w_{dośw}$			
	w_{an}			
	$w_{dośw}$			
	w_{an}			
	$w_{dośw}$			
	w_{an}			

Należy obliczyć wartość różnicy względnej wyników pomiarów względem rozwiązania analitycznego wyrażoną w procentach:

$$\delta_w = \frac{w_{dosw} - w_{an}}{w_{an}} \cdot 100\%. \quad (26)$$

Obliczone wartości należy wpisać do tabeli 4.

Tabela 4. Wartość różnicy względnej przemieszczeń [%]

Odległość punktu od osi płyty r [mm]	Wartość obciążenia q [MPa]		

5.2 Wyznaczanie naprężeń na podstawie pomiaru odkształceń

W tej części ćwiczenia należy zmierzyć wartości odkształceń promieniowych ε_r oraz obwodowych ε_t w wybranych punktach płyty. Wartości odległości wybranych punktów pomiarowych od osi płyty oraz wartości ciśnienia należy ustalić z prowadzącym na podstawie danych z tabeli 2. Wyniki pomiarów należy zapisać w tabeli 5. Korzystając z wzorów (4) i (5) należy obliczyć wartości doświadczalne naprężeń σ_r , σ_t i zapisać je w polach „dośw” tabeli 6. Należy również obliczyć teoretyczne wartości naprężeń korzystając z wzorów (16), (24) i (25) oraz zapisać je w polach „an” tabeli 6.

Tabela 5. Wyniki pomiarów odkształceń [$\mu\text{m}/\text{m}$]

Odległość punktu od osi płyty r [mm]	Wartość obciążenia q [MPa]					
	ε_r	ε_t	ε_r	ε_t	ε_r	ε_t

Tabela 6. Wartości naprężeń [MPa]

Odległość punktu od osi płyty r [mm]		Wartość obciążenia q [MPa]					
		σ_r	σ_t	σ_r	σ_t	σ_r	σ_t
	dośw						
	an						
	dośw						
	an						
	dośw						
	an						

Wzorując się na równaniu (26) oraz tabeli 4 należy opracować analizę różnicy względnej wyników doświadczalnych względem rozwiązania analitycznego dla naprężeń σ_r i σ_t .

6. OPRACOWANIE WYNIKÓW I WYTYCZNE DO SPRAWOZDANIA

Sprawozdanie powinno zawierać:

- I. Cel ćwiczenia
- II. Wstęp teoretyczny
- III. Rysunek i opis stanowiska pomiarowego
- IV. Część obliczeniową, w której należy zawrzeć:
 - a. wyniki badań oraz obliczenia analityczne przemieszczeń lub naprężeń (w zależności od wykonanej części ćwiczenia wskazanej przez prowadzącego) – tabele 3 i 6;
 - b. porównanie wyników badań doświadczalnych przemieszczeń lub naprężeń (w zależności od wykonanej części ćwiczenia) z wynikami analitycznymi na podstawie analizy różnicy względnej opisanej w rozdziale 5.1; dodatkowo należy opracować wykresy zawierające serie punktów otrzymanych w wyniku pomiarów doświadczalnych (znaczniki punktowe) oraz linie ciągłe przedstawiające rozwiązanie analityczne.
- V. Wnioski z ćwiczenia.

7. PRZYKŁADOWE PYTANIA KONTROLNE

1. Wymień podstawowe założenia teorii płyt.
2. Wymień siły wewnętrzne działające w przekroju płyty kołowej osiowosymetrycznej.
3. Podaj jednostki sił wewnętrznych działających w przekroju płyty kołowej osiowosymetrycznej.
4. Jak zależy kąt ugięcia powierzchni środkowej płyty od ugięcia?
5. Od czego zależy sztywność płyty?
6. W którym miejscu przekroju płyty występują największe naprężenia styczne?

LITERATURA

1. G.U.N.T. Gerätebau, *Experiment instructions – FL 120, Stress and Strain Analysis on a Membrane*, Barsbüttel, Germany, 2011.
2. G.U.N.T. Gerätebau, *Instruction manual – FL 151 Multi-Channel Measurement Amplifier*, Barsbüttel, Germany, 2011.
3. Laboratorium z wytrzymałości materiałów, *Statyczne pomiary tensometryczne*, Instytut Mechaniki i Inżynierii Obliczeniowej, Politechnika Śląska, Gliwice, <http://www.imio.polsl.pl/download.aspx#wm>
4. Bąk R., Burezyński T.: *Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego*, WNT, Warszawa 2001.
5. Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z.: *Wytrzymałość materiałów*, t. II, WNT, Warszawa 1996-97.



Czy
wiesz,
że...

Na Śląsku działa ponad 50 zakładów związanych z branżą motoryzacyjną. Wybrane zakłady posiadają własne biura konstrukcyjne oraz laboratoria, i są Twoimi potencjalnymi pracodawcami. Jeśli chcesz zwiedzić jeden z takich zakładów, skontaktuj się z opiekunami SKN Metod Komputerowych <http://dydaktyka.polsl.pl/kwmimkm/KN/default.aspx>.
(Obraz: www.trw.pl)





PROTOKÓŁ Z ĆWICZENIA

BADANIA DOŚWIADCZALNE PŁYTY KOŁOWEJ OSIOWOSYMETRYCZNEJ

Kierunek: _____ Grupa: _____ Sekcja: _____

Data wykonania ćwiczenia: _____

Prowadzący: _____ Podpis _____

Tabela przemieszczeń płyty $w(r,q)$ [10^{-2} mm]

Odległość punktu od osi płyty r [mm]	Wartość obciążenia q [bar]		
	$q = \dots\dots\dots$	$q = \dots\dots\dots$	$q = \dots\dots\dots$
$r = \dots\dots\dots$			
$r = \dots\dots\dots$			
$r = \dots\dots\dots$			
$r = \dots\dots\dots$			
$r = \dots\dots\dots$			