



Instytut Mechaniki i Inżynierii Obliczeniowej
Wydział Mechaniczny Technologiczny
Politechnika Śląska



www.imio.polsl.pl



fb.com/imiopolsl



twitter.com/imiopolsl

LABORATORIUM WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

**Badania doświadczalne
drgań własnych nietłumionych i tłumionych**

1. CEL ĆWICZENIA

- ♦ Zapoznanie się z teorią dotyczącą drgań swobodnych oraz zjawiskami rezonansu i tłumienia.
- ♦ Wykonanie eksperymentów na stanowisku do badań drgań własnych dla sztywnej belki z elementem sprężystym (sprężyna) i tłumiącym (tłumik olejowy).
- ♦ Doświadczalne wyznaczenie częstotliwości drgań własnych nietłumionych i tłumionych badanego układu.
- ♦ Doświadczalne zbadanie zjawiska rezonansu oraz wyznaczenie krzywej rezonansowej.
- ♦ Doświadczalne zbadanie wpływu parametrów elementów sprężystych i tłumiących na drgania układu.

2. WPROWADZENIE

Drgania można zdefiniować jako proces, w którym parametry zbliżają się i oddalają od pewnej wartości przeciętnej. Takimi parametrami mogą być na przykład przyspieszenie czy przemieszczenie. Wartość przeciętna może być stała lub zmienna w czasie.

Drgania są ruchami bardzo często występującymi w przyrodzie, jednak w technice występują one jako ruchy pasożytnicze występujące obok ruchów roboczych. Najczęściej są to ruchy niepożądane i mogące wywołać szkodliwe skutki, takie jak uszkodzenie maszyny. Szkodliwość ta wynika z powtarzalności przemieszczeń, a co za tym idzie zmiennych obciążeń prowadzących do zużycia się urządzeń. Drgania mogą również powodować niepoprawną pracę maszyn, mają też niekorzystny wpływ na człowieka.

W niektórych przypadkach drgania są wywoływane celowo, aby służyły jako ruch roboczy na przykład w transporterach wibracyjnych czy urządzeniach uderowo-wibracyjnych.

W uproszczonej formie możemy podzielić drgania na:

- drgania deterministyczne,
 - okresowe,
 - nieokresowe,
- drgania stochastyczne.

Na potrzeby naszych badań możemy wyróżnić drgania:

- swobodne nietłumione,
- swobodne tłumione,
- wymuszone (kinematycznie lub bezwładnościowo).

3. PODSTAWY TEORETYCZNE

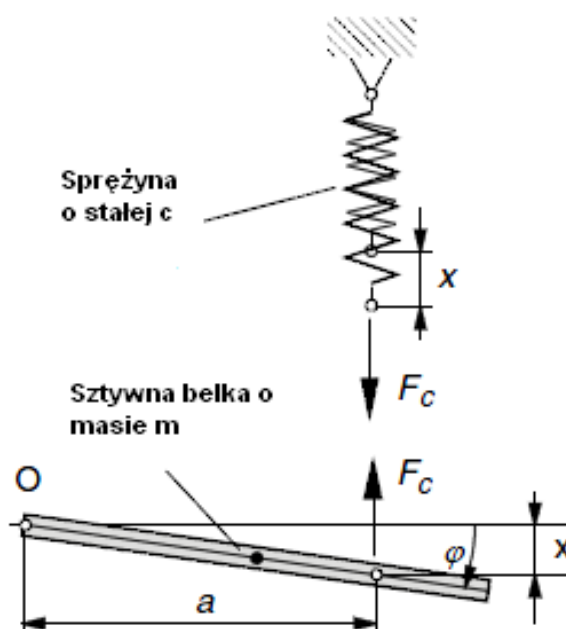
3.1 Drgania swobodne

Drgania swobodne występują wtedy, gdy na układ drgający nie wpływają żadne zewnętrzne siły. Drgania zachodzą w wyniku wstępnego wychylenia układu z położenia równowagi trwają do momentu, aż oscylacje układu zanikną w wyniku tłumienia.

Możemy wyróżnić tłumienie:

- wewnętrzne – wynikające z tarć wewnątrz układu,
- zewnętrzne – aplikowane na przykład za pomocą tłumika olejowego.

Na rys. 1 przedstawiono badany układ, który składa się ze sztywnej belki o masie m oraz sprężyny o stałej c , reprezentującej jej sztywność.



Rys. 1. Schemat badanego układu drgań swobodnych nietłumionych

Dla badanego układu równanie równowagi dynamicznej momentów względem punktu O ma postać:

$$\sum M_O = 0: J_O \cdot \ddot{\varphi} + F_C \cdot a = 0,$$

stąd:

$$J_O \cdot \ddot{\varphi} = -F_C \cdot a, \quad (1)$$

gdzie:

φ – kąt wychylenia belki,

a – odległość między punktem zamocowania sprężyny a punktem mocowania belki (punktem O),

F_C – siła działająca w sprężynie,

J_O – masowy moment bezwładności belki.

Kropki nad zmienną w równaniu (1) oznaczają różniczkowanie względem czasu. Siła F_C jest wynikiem wychylenia belki oraz stałej sprężyny i dla małych kątów wynosi:

$$F_C = c \cdot x = c \cdot \phi \cdot a, \quad (2)$$

gdzie:

x – wychylenie punktu belki równe wydłużeniu/skróceniu sprężyny,

c – stała sprężyny.

Masowy moment bezwładności belki względem punktu O wyrażony jest wzorem:

$$J_O = \frac{m \cdot L^2}{3}, \quad (3)$$

gdzie:

m – masa belki,

L – długość całkowita belki.

Podstawiając równania (2) oraz (3) do równania (1) otrzymujemy równanie ruchu w następującej postaci:

$$\ddot{\phi} + \frac{3 \cdot c \cdot a^2}{m \cdot L^2} \cdot \phi = 0. \quad (4)$$

Rozwiązanie powyższego równania przyjmuje formę harmonicznego oscylacji odpowiednio o częstości kołowej ω_0 [rad/s] i częstotliwości drgań własnych f [Hz] :

$$\omega_0^2 = \frac{3 \cdot c \cdot a^2}{m \cdot L^2}, \quad (5)$$

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot c \cdot a^2}{m \cdot L^2}} = \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (6)$$

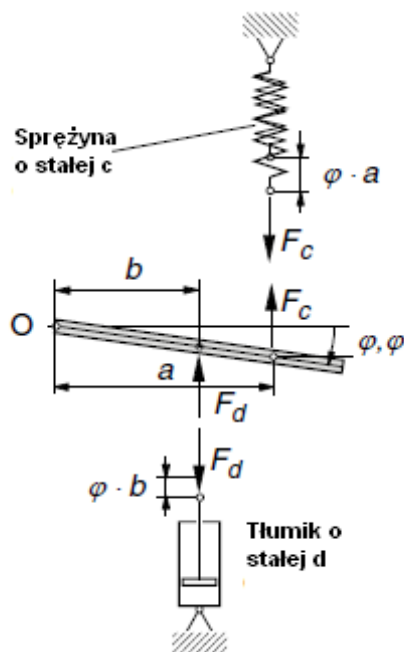
W tym przypadku okres drgań T [s] jest równy:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot L^2}{3 \cdot c \cdot a^2}}. \quad (7)$$

3.2 Drgania tłumione

Drgania tłumione występują wtedy, gdy do układu drgającego dołączone jest zewnętrzne tłumienie na przykład w postaci tłumika wiskotycznego, w którym siła wywoływana przez tłumik jest wprost proporcjonalna do prędkości elementu masowego. Ruch takiego układu ma charakter drgań o stale malejącej amplitudzie. Wpływ tłumienia, wskazujący jak maleje amplituda drgań w kolejnych okresach, jest prezentowany przez *dekrement tłumienia*. Dla drgań tłumionych liniowych dekrement tłumienia ma wartość stałą.

Badany układ przedstawiono na rys. 2, który składa się ze sztywnej belki o masie m , sprężyny o stałej c oraz tłumika o stałej tłumienia d .



Rys. 2. Schemat badanego układu drgań swobodnych tłumionych

Przedstawienie równań ruchu dla drgań tłumionych wymaga sformułowania równania równowagi dynamicznej momentów względem punktu O (rys. 2):

$$\sum M_O = 0: J_O \cdot \ddot{\varphi} + F_C \cdot a + F_d \cdot b = 0,$$

stąd

$$J_O \cdot \ddot{\varphi} = -F_C \cdot a - F_d \cdot b, \quad (8)$$

gdzie:

F_d – siła tłumiąca,

b – odległość zamocowania tłumika od mocowania belki.

Siła tłumiąca wynika z prędkości wychylania się belki $\dot{x}$ oraz współczynnika tłumienia wiskotycznego d , i dla małych kątów wynosi:

$$F_d = d \cdot \dot{x} = d \cdot \dot{\varphi} \cdot b. \quad (9)$$

Podstawiając równania (2), (3) oraz (9) do równania (8) otrzymujemy:

$$\ddot{\varphi} + \frac{d \cdot b^2}{J_O} \cdot \dot{\varphi} + \frac{c \cdot a^2}{J_O} \cdot \varphi = 0, \quad (10)$$

lub poprzez podstawienie $y = L \cdot \varphi$, gdzie y reprezentuje przemieszczenie końca belki (rejestrowane przez urządzenie rejestrujące układu):

$$\ddot{y} + 2 \cdot D \cdot \omega_0 \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0, \quad (11)$$

gdzie:

D – stopień tłumienia,

ω_0 – częstość kołowa drgań własnych.

Stopień tłumienia D oraz częstość kołowa drgań własnych ω_0 są wyrażane wzorami:

$$D = \frac{d \cdot b^2}{2 \cdot J_o \cdot \omega_0}, \quad (12)$$

$$\omega_0^2 = \frac{c \cdot a^2}{J_o}. \quad (13)$$

Rozwiązanie przyjmuje wtedy postać zanikających drgań harmonicznym z początkowym wychyleniem y_0 .

$$y(t) = \frac{\omega_0}{\omega_d} \cdot y_0 \cdot e^{-D \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \psi), \quad (14)$$

gdzie:

t – czas,

ψ – przesunięcie fazowe,

y_0 – początkowe wychylenie końca belki,

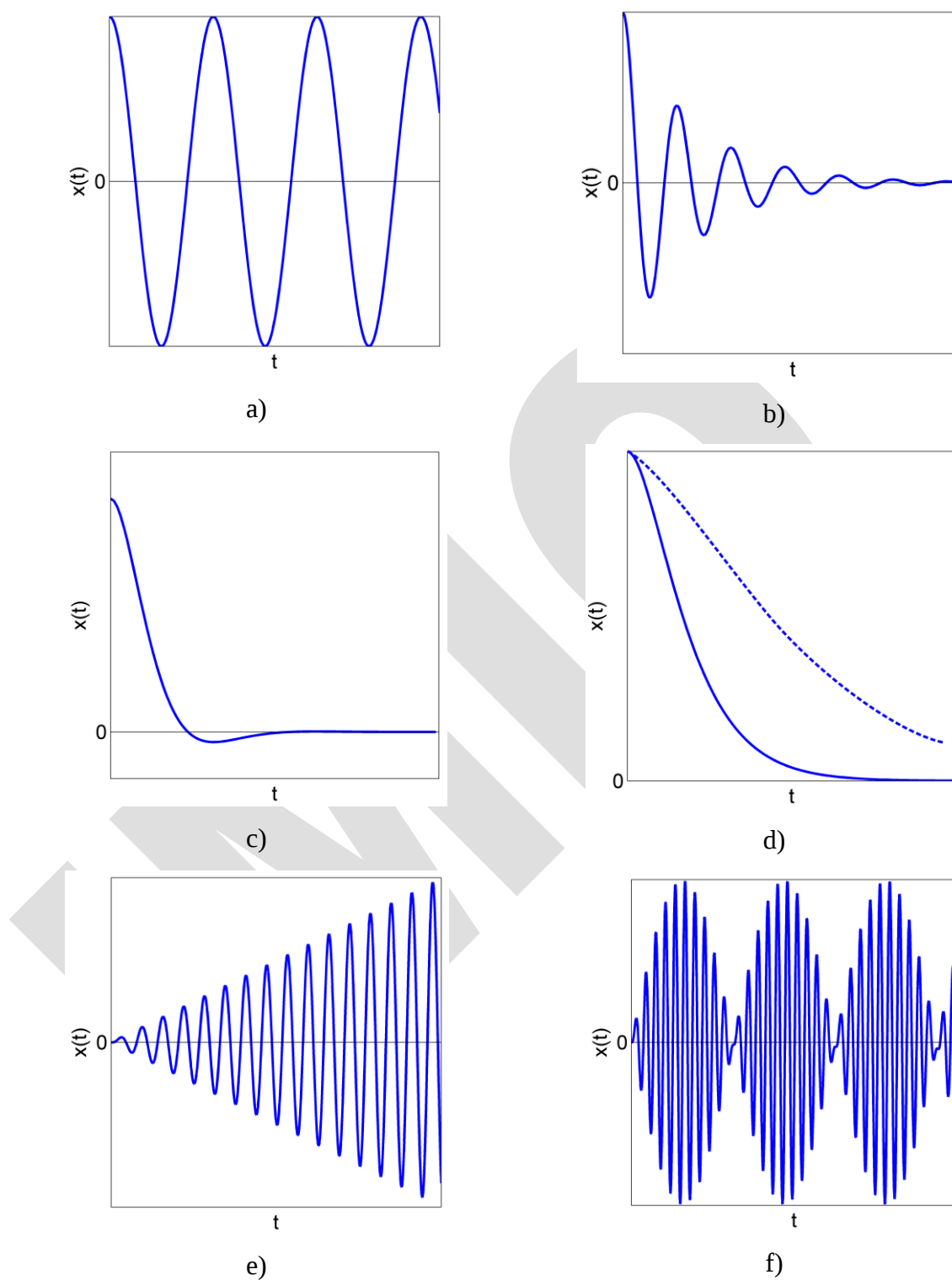
ω_d – częstość kołowa drgań układu wynosząca:

$$\omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - D^2}. \quad (15)$$

Ze wzorów (14) oraz (15) wynika, że nie są możliwe oscylacje przy $D > 1$. W takim przypadku mówimy o *tłumieniu nadkrytycznym*. Gdy $D = 1$, tłumienie nazywane jest *krytycznym*. Gdy $D < 1$, ruch ma charakter oscylacyjny a tłumienie nazywane jest *podkrytycznym*.

3.3 Zjawisko rezonansu

Zjawisko rezonansu występuje wtedy, gdy częstotliwość siły wymuszającej pokrywa się z częstotliwością drgań własnych układu. W przypadku braku tłumienia amplituda drgań dąży wtedy do nieskończoności. Rezonans jest zjawiskiem w większości przypadków niepożądanym i prowadzącym do szybszego zużycia się układu lub nawet do jego uszkodzenia. Dlatego też istotnym jest by znać częstotliwości drgań własnych wykorzystywanego urządzenia oraz częstotliwości wymuszeń działających na ten układ. Następnie poprzez zmianę parametrów takich jak masa układu, miejsce zamocowania poszczególnych elementów czy tłumienie w układzie można ograniczyć zjawisko rezonansu. W przypadku, gdy częstotliwość wymuszenia jest bliska częstotliwości drgań własnych układu, obserwuje się *dudnienie*. Różne przypadki ruchu układu pokazano na rysunku 3.

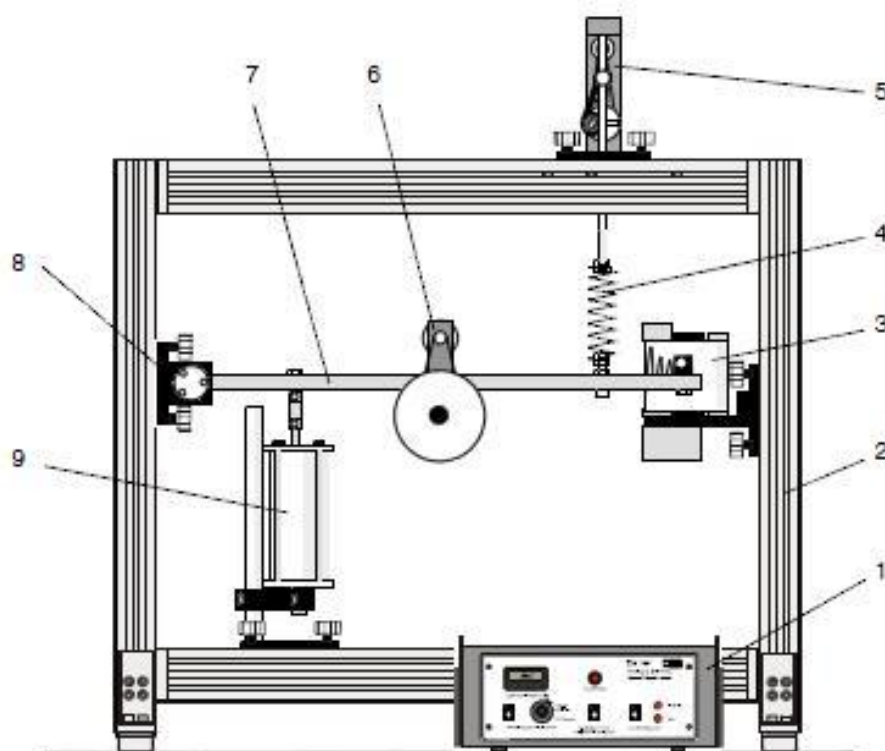


Rys. 3. Różne przypadki ruchu układu: a) drgania swobodne bez tłumienia, b) i c) drgania swobodne z tłumieniem podkrytycznym, d) tłumienie krytyczne (linia ciągła) i nadkrytyczne (linia przerywana) – brak oscylacji, e) drgania rezonansowe, f) dudnienie

4. STANOWISKO POMIAROWE

Stanowisko badawcze składa się z:

- właściwego stanowiska badawczego (rys. 8),
- komputera klasy pc,
- jednostki kontrolnej,
- systemu zapisywania danych TM 150.20/ TM 155.20.



Rys. 8. Schemat stanowiska badawczego

W skład stanowiska wchodzi:

1. Jednostka kontrolna
2. Rama aluminiowa
3. Urządzenie rejestrujące przemieszczenie końca belki
4. Sprężyna
5. Stymulator przemieszczenia
6. Stymulator masy skupionej
7. Belka
8. Element mocujący belkę
9. Tłumik
10. Jednostka kontaktowa do mierzenia amplitudy (nie pokazana na rys. 8)

Stanowisko pozwala na przeprowadzenie badań zarówno drgań swobodnych, jak i wymuszonych.

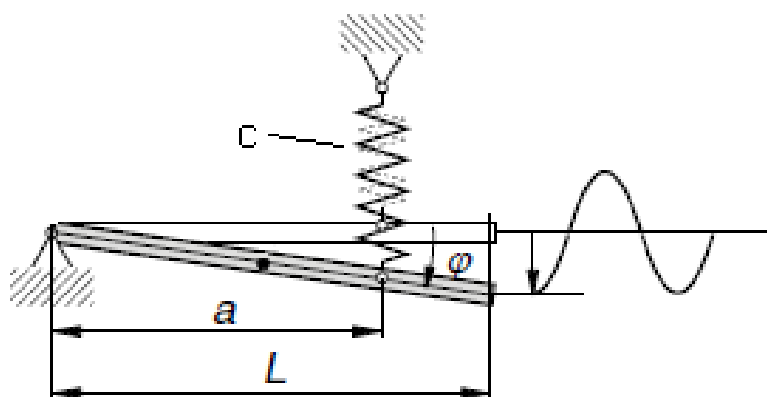
5. PRZEBIEG ĆWICZENIA

Parametry badanego układu wynoszą:

- masa belki $m = 1.68$ kg,
- niewyważona masa wzбудnika bezwładnościowego $m_{imb} = 100$ g,
- stałe sprężyn $c = \{0,75; 1,5; 3\}$ N/mm;
- stała tłumienia tłumika $d = 5 \div 15$ Ns/m.
- długość belki $L = 732$ mm.

5.1 Badanie drgań swobodnych

W celu zbadania zachowania się układu podczas drgań swobodnych, należy zmieniać położenie sprężyny a oraz jej stałą c . Układ do badania drgań swobodnych został przedstawiony na rys. 9.



Rys. 9. Schemat układu – drgania nietłumione

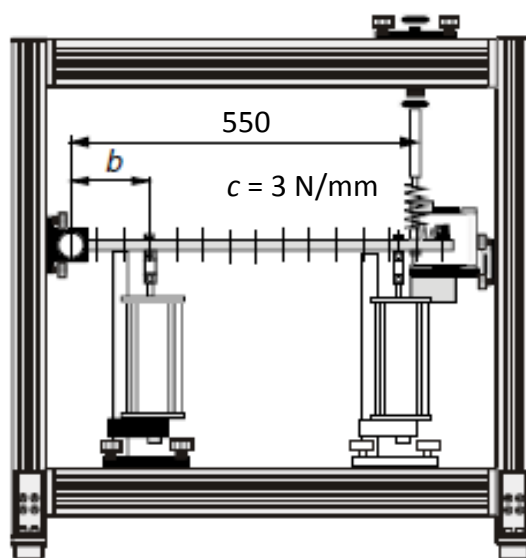
Wykonanie 9 doświadczeń – po 3 dla każdej ze sprężyn zamontowanych w kolejnych punktach – pozwala określić wpływ obydwu parametrów (a oraz c) na zachowanie się układu. Plan badań drgań swobodnych przedstawia tabela 1.

Tabela 1. Plan badań drgań swobodnych

Nr doświadczenia	Punkt zamocowania sprężyny a [mm]	Wartość stałej sprężyny c [N/mm]
1	550	0,75
2	600	0,75
3	650	0,75
4	550	1,5
5	600	1,5
6	650	1,5
7	550	3
8	600	3
9	650	3

5.2 Badanie drgań tłumionych

W celu zbadania drgań tłumionych układu zmieniamy punkt zamocowania tłumika b oraz stałą tłumienia d . Układ do badania drgań tłumionych został przedstawiony na rys. 10. Punkt zamocowania sprężyny jest stały i wynosi $a = 550$ mm. Używana jest jedna sprężyna o stałej $c = 3$ N/mm.



Rys. 10. Schemat układu – drgania tłumione

Należy wykonać po 3 badania dla każdej kombinacji pozycji i stałej tłumienia. Stała tłumienia jest zmieniana poprzez odkręcenie lub zakręcenie śruby tłumika. Plan badań przedstawia tabela 2.

Tabela 2. Plan badań drgań tłumionych

Nr doświadczenia	Punkt zamocowania tłumika b [mm]	Stała tłumienia d [Ns/m]
1	150	Śruba odkręcona (~5)
2	150	Śruba zakręcona (~15)
3	250	Śruba odkręcona (~5)
4	250	Śruba zakręcona (~15)

6. OPRACOWANIE WYNIKÓW I WYTYCZNE DO SPRAWOZDANIA

Sprawozdanie powinno zawierać:

- I. Cel ćwiczenia
- II. Wstęp teoretyczny
- III. Rysunek i opis stanowiska pomiarowego
- IV. Część obliczeniową, w której należy zawrzeć:
 - a. wyniki badań drgań nietłumionych wraz z ich porównaniem z wartościami uzyskanymi z odpowiednich zależności analitycznych, w tym wyznaczenie błędu względnego;
 - b. wyniki badań drgań tłumionych wraz z ich porównaniem z wartościami uzyskanymi z odpowiednich zależności analitycznych, w tym wyznaczenie błędu względnego.
- V. Wnioski z ćwiczenia z podziałem na wnioski dotyczące drgań nietłumionych, drgań tłumionych oraz wnioski ogólne.

7. PRZYKŁADOWE PYTANIA KONTROLNE

1. Wyjaśnij pojęcia: drgania, drgania swobodne i tłumione.
2. Jak można podzielić drgania?
3. Na czym polega zjawisko rezonansu?
4. Zdefiniuj pojęcia: częstotliwość drgań, częstość kołowa drgań, okres drgań oraz amplituda drgań.
5. Wymień i omów przypadki tłumienia.
6. Wymień i opisz możliwe przypadki ruchu badanego układu.

LITERATURA

1. G.U.N.T. Gerätebau, *Experiment instructions – TM 155, Free and forced vibration apparatus*, Barsbüttel, Germany, 2011.
2. G.U.N.T. Gerätebau, *Instruction manual – TM 15x.20 Software for data acquisition*, Barsbüttel, Germany, 2003.
3. Misiak K.: *Badania doświadczalne drgań własnych i wymuszonych*, Praca przejściowa, Promotor: Prof. A. John, Politechnika Śląska, Gliwice 2013.
4. Kapitaniak T.: *Wstęp do teorii drgań*, Politechnika Łódzka, Łódź 1992.
5. Osiński Z.: *Teoria drgań*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1980.
6. Osiński Z.: *Tłumienie drgań mechanicznych*, PWN, Warszawa 1986.
7. Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z.: *Wytrzymałość materiałów*, t. II, WNT, Warszawa 1996-97.



**Czy
wiesz,
że...**

Zespół Wyścigowy PolSI Racing (racing.polsl.pl) to koło naukowe, które powstało w 2013 roku w Instytucie Mechaniki i Inżynierii Obliczeniowej. Również i Ty również możesz w nim działać i przyczynić się do jego sukcesów!





PROTOKÓŁ Z ĆWICZENIA

BADANIA DOŚWIADCZALNE DRGAŃ WŁASNYCH NIETŁUMIONYCH I TŁUMIONYCH

Kierunek: _____ Grupa: _____ Sekcja: _____

Data wykonania ćwiczenia: _____

Prowadzący: _____ Podpis _____

Drgania swobodne nietłumione:

Lp	Punkt zamocowania sprężyny a [mm]	Wartość stałej sprężyny c [N/mm]	f [Hz]
1	550	0,75	
2	600	0,75	
3	650	0,75	
4	550	1,5	
5	600	1,5	
6	650	1,5	
7	550	3	
8	600	3	
9	650	3	

Drgania swobodne tłumione:

Lp	Punkt zamocowania tłumika b [mm]	Stała tłumienia d [Ns/m]	f [Hz]		
1	150	~5 (śruba odkręcona)	1.	2.	3.
2	150	~15 (śruba zakręcona)	1.	2.	3.
3	250	~5 (śruba odkręcona)	1.	2.	3.
4	250	~15 (śruba zakręcona)	1.	2.	3.