

KONKURS

„0 złoty indeks Politechniki Śląskiej”

Matematyka, edycja 2024/2025, etap I

Zadanie 1. Suma objętości kuli i stożka, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym, wynosi π . Wyznacz promień kuli i promień podstawy stożka, dla których iloczyn objętości kuli i objętości stożka jest największy.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie

$$-8 \sin^2 x + 8 \cos^2 x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0.$$

Zadanie 3. W ciągu (a_n) : $a_1 = 4$, $a_2 = 20$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$. Udowodnij, że żaden spośród wyrazów tego ciągu nie jest podzielny przez 3.

Zadanie 4. Trzy okręgi są ze sobą parami styczne zewnętrznie. Udowodnij, że iloczyn długości ich promieni jest równy podwojonemu iloczynowi promienia okręgu opisanego na trójkącie, którego wierzchołkami są środki tych trzech okręgów oraz pola trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności tych trzech okręgów.