



Politechnika Śląska w Gliwicach

Konkurs "O złoty indeks Politechniki Śląskiej"

Gliwice, 10.03.2023

Zadania z matematyki - etap II

**Zadanie 1.** Rozwiąż nierówność:

$$\log_4 x + 2\log_4^3 x + 4\log_4^5 x + 8\log_4^7 x + 16\log_4^9 x + \dots > \log_2 x,$$

której lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

**Zadanie 2.** Przedstaw na płaszczyźnie zbiór punktów  $(x, y)$ , będących rozwiązaniami równania

$$\lceil |x + y| \rceil + \lceil |x - y| \rceil = 2$$

(symbol  $\lceil p \rceil$  oznacza zaokrąglenie liczby  $p$  w górę do najbliższej liczby całkowitej).

**Zadanie 3.** Niech  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Na prostokątnej planszy wymiaru  $m$  na  $n$ , składającej się z  $m \cdot n$  kwadratowych pól, na lewym górnym polu stoi pion rozpoczynającego gracza, a na prawym dolnym polu - pion drugiego gracza. Obaj gracze, na przemian, przesuwać swojego piona na planszy o jedno pole w górę, dół, lewo lub prawo. Gracz, który może postawić swojego piona na polu, zajęтым przez piona przeciwnika, wygrywa.

- Wyznacz, który z graczy posiada strategię zwycięską (to znaczy może zapewnić sobie wygraną bez względu na ruchy przeciwnika) w zależności od wartości  $m, n$ ?

- Wyznacz najmniejszą liczbę ruchów obu graczy, po której gracz posiadający strategię zwycięską wygra grę, niezależnie od ruchów przeciwnika.

**Zadanie 4.** Dane są następujące podzbiory płaszczyzny:

$$A = \{(x, y) : x + y^2 = 1\}, \quad B = \{(x, y) : x^2 - 4x + y^2 + 10y + 28 = 0\}.$$

Wyznacz taką parę punktów  $(a, b)$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ , których odległość od siebie będzie najmniejsza.