



**Politechnika Śląska w Gliwicach**  
**Konkurs "O złoty indeks Politechniki Śląskiej"**  
**Gliwice, 4.03.2022**  
**Zadania z matematyki - etap II**

**Zadanie 1.** Udowodnij, że dla każdego  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ ,

$$n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n$$

jest liczbą podzielną przez 24.

**Zadanie 2.** W trójkącie  $ABC$ :

- $E$  jest środkiem boku  $AB$ ,
- $D$  należy do boku  $CE$ ,
- $|CE| = 9$ ,  $|DE| = 3$ ,
- punkt  $F$  jest częścią wspólną boku  $BC$  i prostej, zawierającej punkty  $A$  oraz  $D$ .
- $\sphericalangle FAC = \sphericalangle ECB = 30^\circ$ .

Wyznacz wszystkie możliwe długości odcinka  $AF$ .

**Zadanie 3.** Dla  $x > 0$ , znajdź punkty przecięcia krzywych

$$y = \frac{x^{x^4} \cdot x^{x^3}}{x^{x^2} \cdot x^x} \text{ i } y = x^x \cdot x^2.$$

**Zadanie 4.** Wyznacz zbiór wartości funkcji

$$f(x) = \sin \left( \frac{\pi \log_{0.25}^2(5 + 3 \cos x)}{4} + \frac{13\pi}{48} \right)$$

wiedząc, że jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.