



**Politechnika Śląska w Gliwicach**  
**Konkurs "O złoty indeks Politechniki Śląskiej"**  
**edycja 2019/2020**  
**Zadania z matematyki - etap I**

**Zadanie 1.** Dany jest trójkąt  $ABC$ , którego boki mają długość  $|AB| = 10$ ,  $|AC| = 8$ ,  $|BC| = 6$ . Punkt  $P$  jest położony na przecięciu symetralnej boku  $AB$  oraz dwusiecznej kąta  $\sphericalangle ACB$ . Oblicz pole trójkąta  $APB$ .

**Zadanie 2.** Rozwiąż nierówność:

$$\log_{x^2} 2 + \log_{x^4} 2 + \log_{x^8} 2 + \dots + \log_{x^{2^n}} 2 \leq 1 - \frac{1}{2^n}.$$

**Zadanie 3.** Wyznacz okres podstawowy ciągu  $a_n = \sin \frac{\pi n^2}{6}$  (okresem podstawowym ciągu  $(a_n)$  nazywamy najmniejszą liczbę  $k \in \mathbb{N}$ , dla której dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = a_{n+k}$ ).

**Zadanie 4.** Obracając trójkąt o wierzchołkach  $A(1, 1)$ ,  $B(0, 2)$  i  $C(2, 3)$  wokół osi  $OX$ , otrzymujemy bryłę  $B_1$ . Następnie obracając bryłę  $B_1$  dookoła osi  $OY$  otrzymujemy bryłę  $B_2$ . Ostatecznie, obracając w przestrzeni bryłę  $B_2$  dookoła prostej prostopadłej do osi  $OX$  oraz  $OY$  i zawierającej środek układu współrzędnych otrzymujemy bryłę  $B_3$ . Oblicz objętości brył  $B_1$  i  $B_3$ .