



**Politechnika
Śląska**

Korzyści z filtrów Czebyszewa

cz. 2

Jacek Izydorczyk

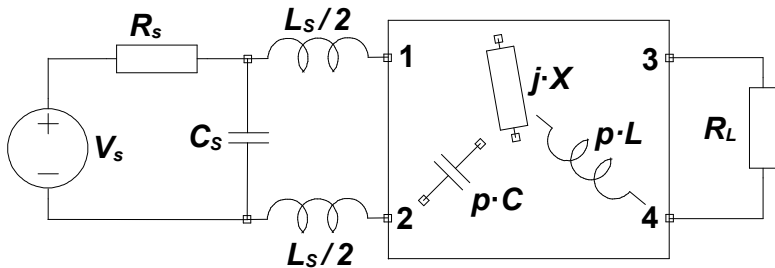
16.01.2026 r. – 17.03.2026 r.

Karzeł widzący się na barkach olbrzymia, dla świata jest karłem z pretensjami alpinisty.

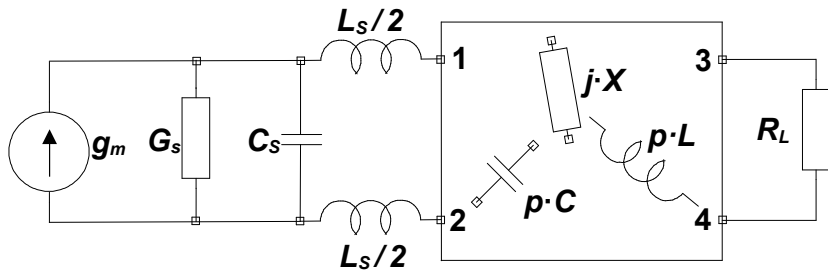
Jan Hartman
Zmierzch filozofii

1. Sformułowanie problemu.
2. Rozwiązanie naiwne.
2. Wzór Fano.
3. Wzory Bodego.
4. Dygresja o logarytmach.
5. Wzory projektowe.
6. Przykład.

Otwarta pętla sprzężenia zwrotnego

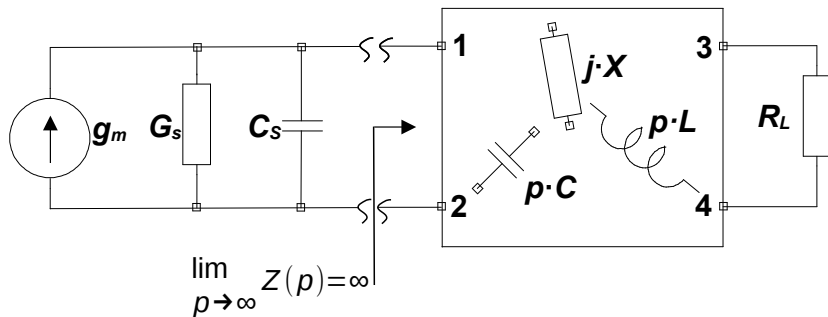


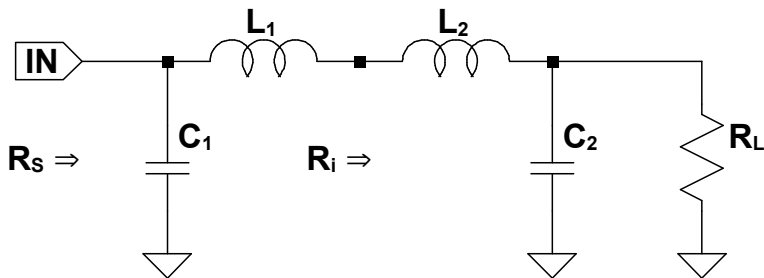
Otwarta pętla sprzężenia zwrotnego



$$\omega \cdot L_s \ll \frac{1}{\omega \cdot C_s}$$

Otwarta pętla sprzężenia zwrotnego





$$Q_{\text{left}} = \omega_0 R_S C_1$$

$$R_S = R_i (Q_{\text{left}}^2 + 1)$$

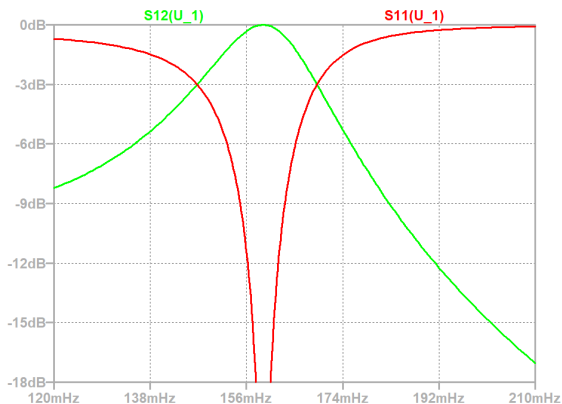
$$\frac{\omega_0 L_1}{R_i} = Q_{\text{left}}$$

$$R_L = R_i \cdot (Q_{\text{right}}^2 + 1)$$

$$Q_{\text{right}} = \omega_0 R_L C_2$$

$$\frac{\omega_0 L_2}{R_i} = Q_{\text{right}}$$

Przykład π – match



$$R_s = 1 \Omega \quad C_1 = C_s = 10,8 \text{ F}$$

$$R_L = 0,15 \Omega \quad \omega_0 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Delta f_{3\text{dB}} = 22,5 \text{ mHz}$$

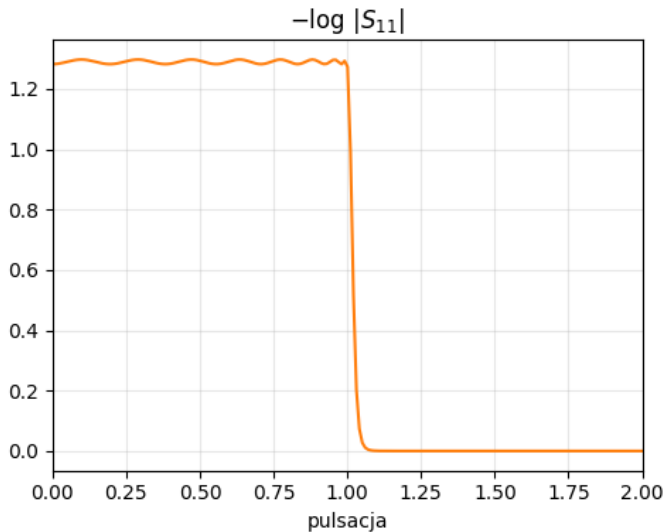
$$Q = 7,07$$

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{1}{|\rho(\omega)|} d\omega = \frac{\pi}{R_S C_S}$$

Fano, R. Theoretical limitations on the broadband matching of arbitrary impedances.
Journal of the Franklin Institute **1950**, 249, 139–154.

1. Niemożliwe jest $\rho(\omega) = 0$ dla $\omega \in (\omega_0, \omega_1)$.
2. Niepożądane jest $\exists \omega_0 \quad \rho(\omega_0) = 0$.
3. Pożądane jest $0 < \rho(\omega) \ll 1$ dla możliwie szerokiego (ω_0, ω_1)

Relacja nieoznaczoności: stratność odbiciowa – pasmo :)



$$|S_{11}(\omega)| = \begin{cases} 10^{-0,05 \cdot RL} & \text{dla } |\omega \pm \omega_o| \leq 2\pi \cdot W \\ 1 & \text{poza tym} \end{cases}$$

$$2\pi \cdot W \cdot \ln 10^{0,05 \cdot RL} = \frac{\pi}{R_S C_S}$$

$$RL \cdot W = \frac{10}{\ln 10} \cdot \frac{1}{R_S C_S}$$

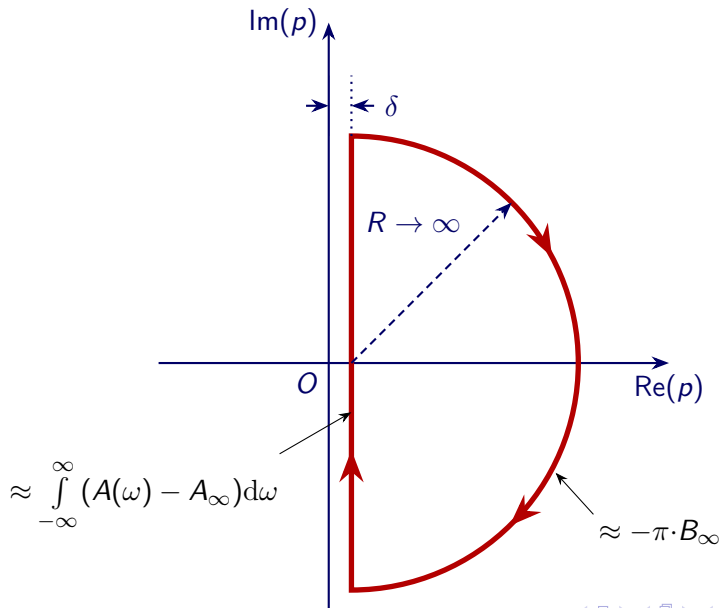
$$RL \approx 27,3 \cdot \frac{f_{3dB}}{W}$$

Skąd Twierdzenie Fano?

Bode, H.W. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*;
D. Van Nostrand Company, Inc.: Princeton, NJ, 1945.

$$\int_0^{\infty} (A(\omega) - A_{\infty}) d\omega = \frac{\pi}{2} B_{\infty}$$

- $F(p) = A(p) + j \cdot B(p)$ jest analityczna dla $\Re(p) > 0$;
- $F(p^*) = F^*(p)$;
- $F(p)$ jest analityczna w zerze: $F(p) = A_0 + B_0 \cdot p + A_1 \cdot p^2 + B_1 \cdot p^3 + \dots$
- $F(p)$ jest analityczna w punkcie w nieskończoności:
 $F(1/p) = A_{\infty} + B_{\infty} \cdot p + A'_1 \cdot p^2 + B'_1 \cdot p^3 + \dots$



$$\oint (F(p) - A_{\infty}) dp = 0$$

$$j \cdot \int_{-R}^R (A(\delta + j\omega) + j \cdot B(\delta + j\omega) - A_{\infty}) d\omega + \int_{\delta+jR}^{\delta-jR} (F(p) - A_{\infty}) dp = 0$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-R}^R B(\delta + j\omega) d\omega = 0 \quad \text{bo} \quad B(-\omega) = -B(\omega)$$

$$j \cdot \int_{-R}^R (A(\delta + j\omega) - A_{\infty}) d\omega + \int_{\delta+jR}^{\delta-jR} (F(p) - A_{\infty}) dp = 0$$

$$j \cdot \int_{-R}^R (A(\delta + j\omega) - A_\infty) d\omega + \int_{\delta+jR}^{\delta-jR} (F(p) - A_\infty) dp = 0$$

$$F(p) - A_\infty = B_\infty/p + A'_1/p^2 + B'_1/p^3 + \dots$$

$$\int_{\delta+jR}^{\delta-jR} (F(p) - A_\infty) dp = B_\infty \int_{\delta+jR}^{\delta-jR} \frac{dp}{p} - \mathcal{O}(1/R) = B_\infty \ln \left(\frac{\delta/R - j}{\delta/R + j} \right) + \dots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (A(\delta + j\omega) - A_\infty) d\omega = \pi \cdot B_\infty$$

$$\int_0^{\infty} (A(j\omega) - A_{\infty}) d\omega = \frac{\pi}{2} \cdot B_{\infty}$$

bo: $A(j\omega) = A(-j\omega)$

Group	Integrand	Result
I (a)	$\theta - \theta_\infty$	$\int_0^\infty (A - A_\infty) d\omega = -\frac{\pi}{2} B_\infty$
(b)	$\frac{\theta - \theta_0}{\omega^2}$	$\int_0^\infty \frac{A - A_0}{\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} B_0$
(c)	$\theta - \theta_\infty$	$\int_0^\infty \omega \frac{dA}{d\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} B_\infty$
(d)	$\frac{\theta - \theta_0}{\omega^2}$	$\int_0^\infty \frac{1}{\omega} \frac{dA}{d\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} (B_\infty - B_0)^*$
II	$\frac{\theta}{\omega}$	$\int_{-\infty}^\infty B du = \frac{\pi}{2} (A_\infty - A_0)$

Note: In Group II $u = \log \omega$.

Group	Integrand	Result
III (a)	$\omega \left(\theta - A_\infty - i \frac{B_\infty}{\omega} \right)$	$\int_0^\infty (\omega B - B_\infty) d\omega = \frac{\pi}{2} A'_1$
(b)	$\frac{\theta - A_0 - i B_0 \omega}{\omega^3}$	$\int_0^\infty \frac{B - B_0 \omega}{\omega^3} d\omega = -\frac{\pi}{2} A_1$
IV (a)	$(\theta - \theta_\infty)^2$	$\int_0^\infty (A - A_\infty)^2 d\omega = \int_0^\infty B^2 d\omega$
(b)	$\frac{(\theta - \theta_0)^2}{\omega^2}$	$\int_0^\infty \frac{(A - A_0)^2}{\omega^2} d\omega = \int_0^\infty \frac{B^2}{\omega^2} d\omega$
(c)	$(\theta - \theta_\infty)^3$	$\int_0^\infty (A - A_\infty)^3 d\omega = 3 \int_0^\infty (A - A_\infty) B^2 d\omega$

Group	Integrand	Result
V (a)	$\frac{\theta^2}{\omega}$	$\int_{-\infty}^{\infty} AB \, du = \frac{\pi}{4}(A_{\infty}^2 - A_0^2)$
(b)	$\omega(\theta - \theta_{\infty})^2$	$\int_0^{\infty} \omega(A - A_{\infty})B \, d\omega = -\frac{\pi}{4}B_{\infty}^2$
(c)	$\frac{(\theta - \theta_0)^2}{\omega^3}$	$\int_0^{\infty} \frac{(A - A_0)B}{\omega^3} d\omega = \frac{\pi}{4}B_0^2$
(d)	$\frac{\theta^2}{\omega}$	$\int_{-\infty}^{\infty} (A - \bar{A})B \, du = 0$

Note: In V(a) and V(d), $u = \log \omega$.

Group	Integrand	Result
VI (a)	$\frac{\theta - A_\infty}{\sqrt{1 - \omega^2/\omega_c^2}}$	$\int_0^{\omega_c} \frac{A - A_\infty}{\sqrt{1 - \omega^2/\omega_c^2}} d\omega = - \int_{\omega_c}^{\infty} \frac{B}{\sqrt{\omega^2/\omega_c^2 - 1}} d\omega$
(b)	$\frac{\theta - A_0}{\omega^2 \sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}}$	$\int_{\omega_c}^{\infty} \frac{A - A_0}{\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}} \frac{d\omega}{\omega^2} = - \int_0^{\omega_c} \frac{B}{\sqrt{\omega_c^2/\omega^2 - 1}} \frac{d\omega}{\omega^2}$

$$F(p) = -\ln \rho(p)$$

$$A(j\omega) = -\ln |\rho(\omega)|$$

zera i bieguny $\rho(p)$ na lewej półpłaszczyźnie

Niech E będzie dowolnym zbiorem spójnym na płaszczyźnie (obszarem) nie zawierającym punktu $z = 0$. Każdą funkcję ciągłą $l(z)$, określoną na zbiorze E i spełniającą dla wszystkich $z \in E$ warunek $e^{l(z)} = z$ (jeżeli taka funkcja istnieje), nazywamy gałęzią (jednoznaczną) logarytmu zmiennej z i oznaczamy przez $\log z$. Mamy więc¹

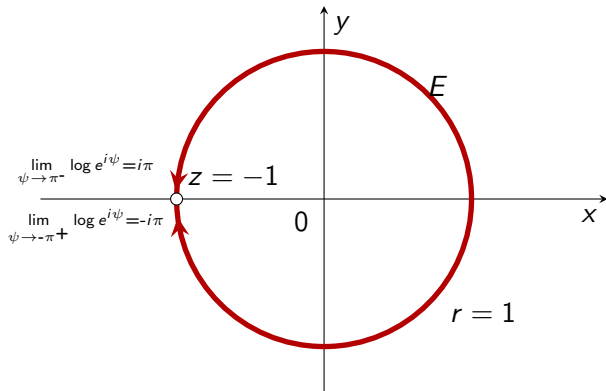
$$e^{\log z} = z \quad \text{dla każdego } z \in E \quad (31)$$

¹F. Leja, *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa 1971, s. 59

Zastrzeżenie

Nie w każdym zbiorze spójnym daje się określić jednoznaczną gałąź $\log z$; nie daje się określić w żadnym zbiorze zawierającym cały okrąg $|z| = r$ o środku $z = 0$.²

$$\log z = \operatorname{Log} |z| + i \operatorname{Arg} z = \operatorname{Log} r + i \operatorname{Arg} z$$



²F. Leja, *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa 1971, s. 59

Definicja logarytmu przez całkowanie

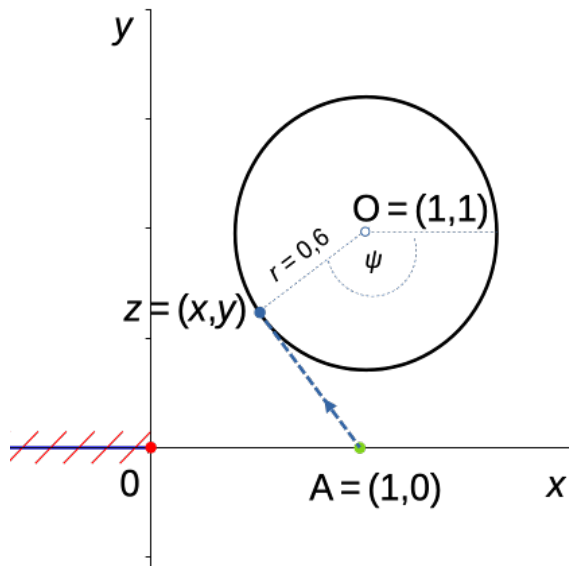
W każdym obszarze jednospójnym $\mathcal{D}$, nie zawierającym punktów 0 ani ∞ ⁽¹⁾, istnieje jednoznaczna gałąź logarytmu i daje się wyrazić całką

$$\log z = \int_a^z \frac{d\zeta}{\zeta} + \log a \quad (33)$$

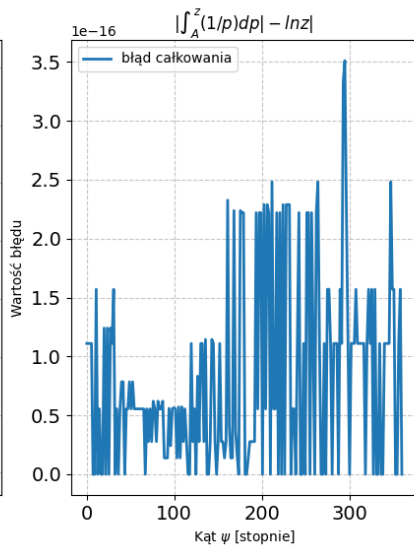
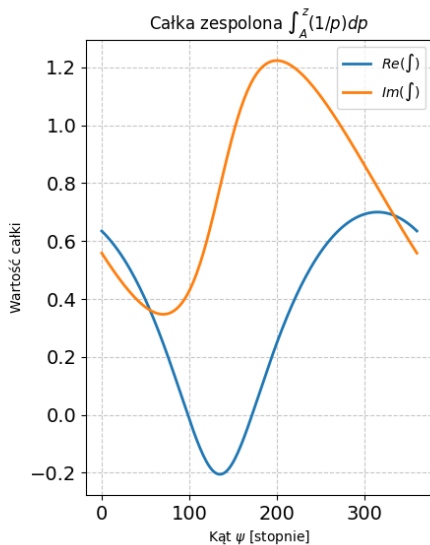
gdzie a jest dowolnym punktem obszaru $\mathcal{D}$, a wartość $\log a$ jest dowolnie ustalona; mamy przy tym

$$(\log z)' = \frac{1}{z}.$$

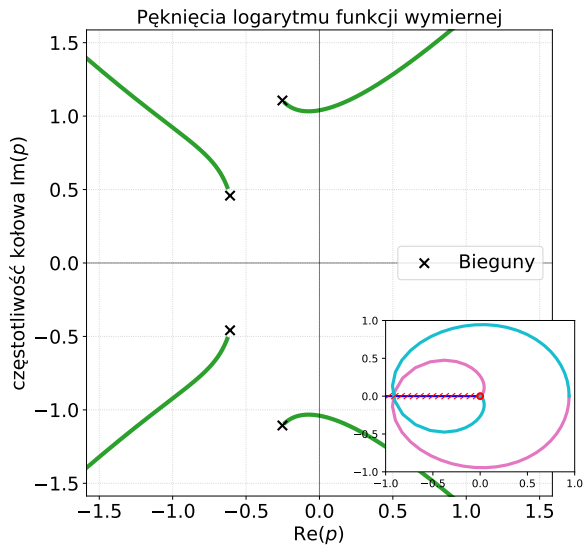
²⁽¹⁾ Obszarem takim jest cała płaszczyzna po odrzuceniu jednej półprostej wychodzącej z punktu $z = 0$ (lub dowolnej krzywej łączącej punkt 0 z punktem ∞ i nie przecinającej się ze sobą).



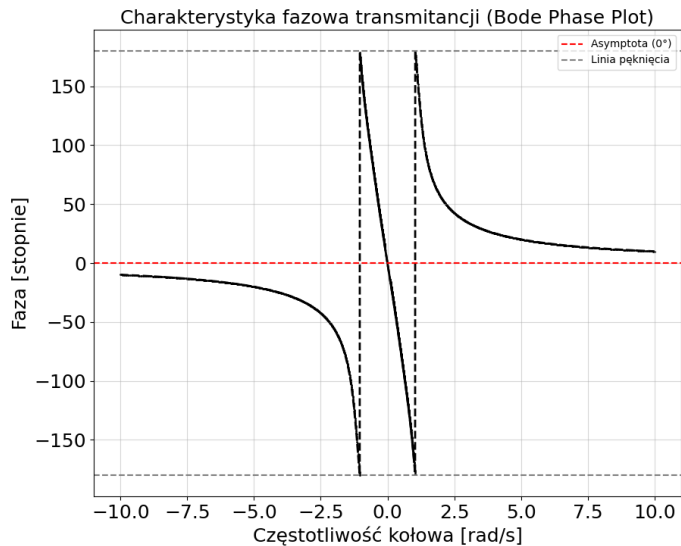
Sprawdzenie numeryczne



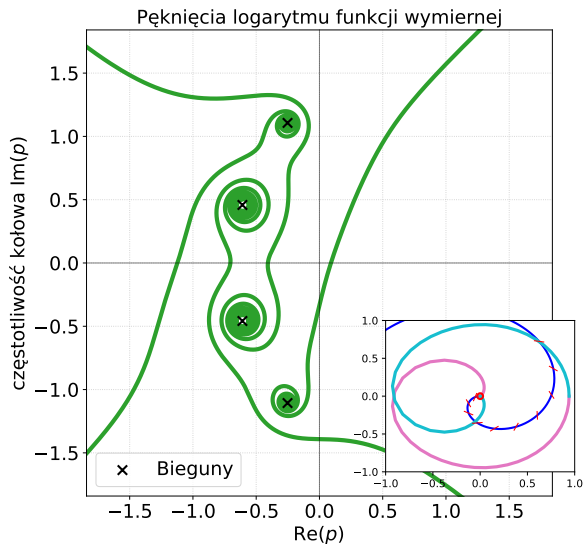
Logarytm transmitancji filtru Czebyszewa



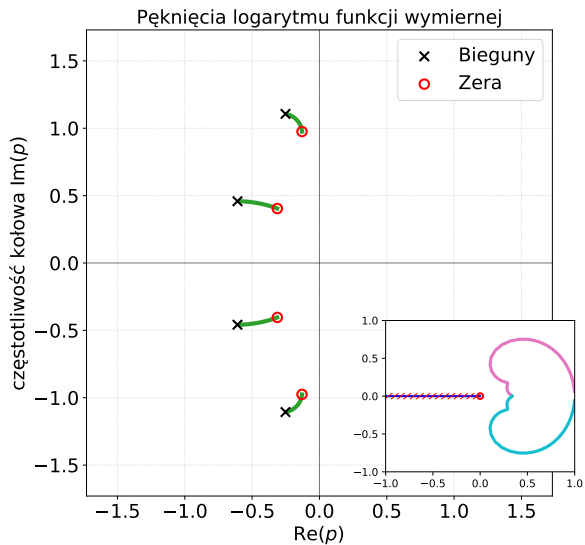
Charakterystyka fazowa



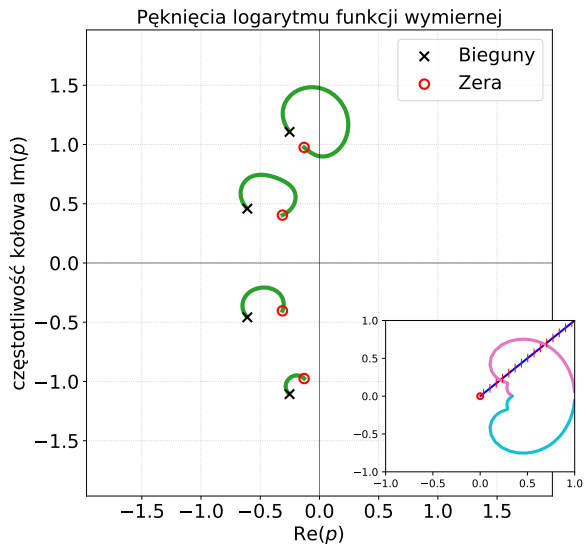
Inna gałąź logarytmu i transmitancja filtru Czebyszewa



Logarytm współczynnika odbicia filtra Czebyszewa



Inna gałąź logarytmu i współczynnik odbicia Czebyszewa



Definicja logarytmu funkcji analitycznej

Uogólnienie. Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną różną od zera w obszarze $\mathcal{D}$ i niech $w = \log f(z)$ będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek $e^w = f(z)$.

Jeżeli obszar $\mathcal{D}$ jest jednospójny, to funkcja $\log f(z)$ istnieje i daje się wyrazić całką

$$\log f(z) = \int_a^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \log f(a), \quad \text{gdzie } a \in \mathcal{D} \quad (35)$$

oraz ma w obszarze $\mathcal{D}$ pochodną równą $f'(z)/f(z)$.

Ludwik Tadeusz Eberman (1885-1945)

- 1910–1918 – kierownik oddziału wysokoprężnych silników okrętowych MAN w Augsburgu;
- konstruktor silników niemieckich U-bootów I wojny światowej;
- 1912 – doktorat na Pol.Lw. pt. "Okrętowe silniki Diesla";
- 1918–1939 – profesor Politechniki Lwowskiej;
- 1939–1945 – profesor Politechniki w Zurychu.



"Nauczanie matematyki na politechnice w zakresie wykraczającym poza suwak logarytmiczny mija się z celem."

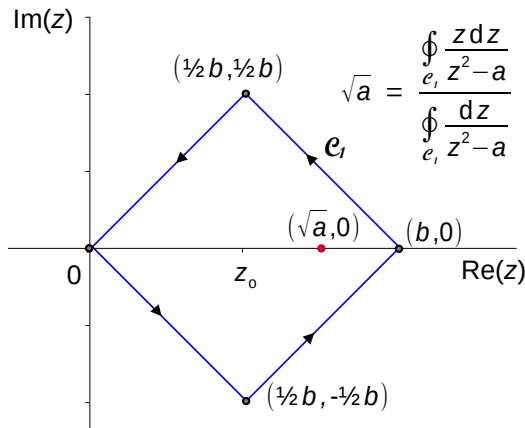
Dygresja do dygresji – wniosek z twierdzenia Cauchy'ego

Niech $f : \overline{U} \mapsto \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą, analityczną w obszarze jednospójnym U . Załóżmy przy tym, że f ma w $\overline{U}$ dokładnie jeden pierwiastek z_0 oraz $f'(z_0) \neq 0$. Wówczas dla dowolnej krzywej zamkniętej $\mathcal{C} \subseteq \overline{U}$

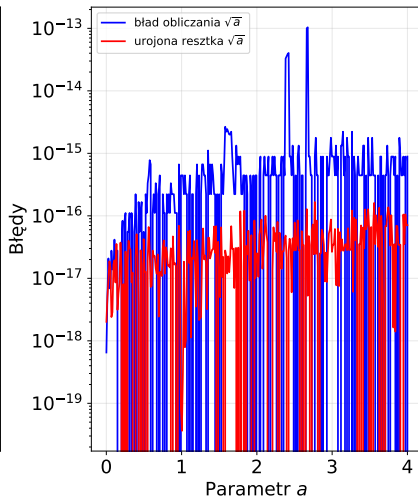
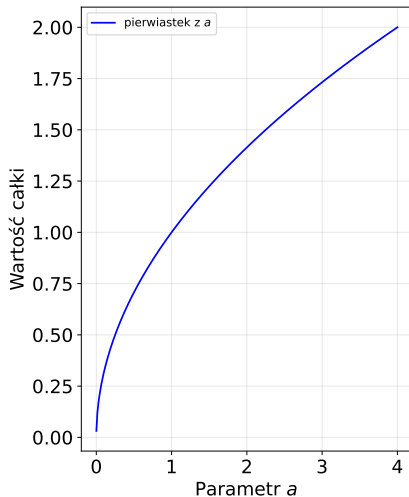
$$z_0 = \frac{\oint_{\mathcal{C}} \frac{z \, dz}{f(z)}}{\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{f(z)}}.$$

Ingo Ullisch. *A closed-form solution to the geometric goat problem. The Mathematical Intelligencer*, pages 1–5, 2020.

- $g(z) = \frac{z - z_0}{f(z)}$ dla $z \in \overline{U} \setminus \{z_0\}$;
- $g(z_0) = 1/f'(z_0)$;
- $g(z)$ jest analityczna w $\overline{U}$;
- Stosujemy tw. Cauchy'ego.

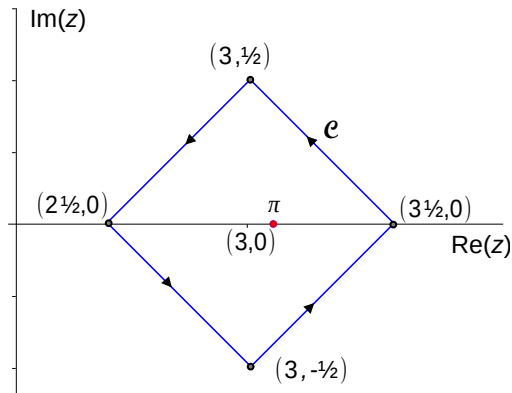


Sprawdzenie dla pierwiastka kwadratowego



$$\pi = \frac{\oint_C \frac{z \, dz}{\sin(z)}}{\oint_C \frac{dz}{\sin(z)}} \approx$$

$$\approx 3,14159265358979 \overset{(3)}{4} - 5,676\text{E-}17 \cdot j$$

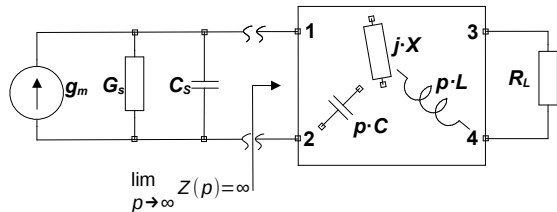


$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\ln |\rho(\omega)|} - \underbrace{A_{\infty}}_0 \right) d\omega = \frac{\pi}{2} B_{\infty}$$

$$\rho(p) = \frac{(Z(p) \parallel \frac{1}{pC_S}) - R_S}{(Z(p) \parallel \frac{1}{pC_S}) + R_S} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} -1$$

↓

$$A_{\infty} = -\ln |\rho(\infty)| = 0$$

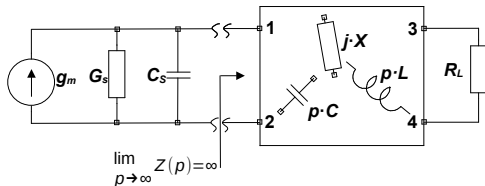


$$-\ln \rho(1/p) = A_{\infty} + B_{\infty} \cdot p + A'_1 \cdot p^2 + B'_1 \cdot p^3 + \dots$$

$$-\ln |\rho(1/p)| = -\ln \left| \frac{(Z(1/p) \parallel \frac{p}{C_S}) - R_S}{(Z(1/p) \parallel \frac{p}{C_S}) + R_S} \right| = -\ln \left| \frac{1 - \frac{p}{R_S C_S} + \frac{p}{R_S C_S} \frac{p}{Z(1/p)}}{1 + \frac{p}{R_S C_S} + \frac{p}{R_S C_S} \frac{p}{Z(1/p)}} \right| \approx \frac{2p}{R_S C_S} + \mathcal{O}(p^2)$$

⇓

$$A_{\infty} = 0 \quad \& \quad B_{\infty} = \frac{2}{R_S C_S}$$



$$\int_0^{\infty} \ln \frac{1}{|\rho(\omega)|} d\omega = \frac{\pi}{R_S C_S}$$

Bode, H.W. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*; D. Van Nostrand Company, Inc.: Princeton, NJ, 1945.



Fano, R. Theoretical limitations on the broadband matching of arbitrary impedances. *Journal of the Franklin Institute* **1950**, 249, 139–154.

$$\rho(p) = \frac{\prod_{r=1}^n (p - \lambda'_r)}{\prod_{r=1}^n (p - \lambda_r)} \xrightarrow{p \mapsto 1/p} \rho\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\prod_{r=1}^n (1 - \lambda'_r p)}{\prod_{r=1}^n (1 - \lambda_r p)}$$

$$\ln \left| \frac{1}{\rho(1/p)} \right| = \ln \left| \frac{\prod_{r=1}^n (1 - \lambda_r p)}{\prod_{r=1}^n (1 - \lambda'_r p)} \right| \approx \underbrace{\sum_{r=1}^n (\lambda'_r - \lambda_r) \cdot p}_{B_\infty} + \mathcal{O}(p^2)$$

Dla minimalnofazowego współczynnika odbicia

$$\sum_{r=1}^n (\lambda'_r - \lambda_r) = \frac{2}{R_S C_S}$$

λ'_r zera współczynnika odbicia;

λ_r bieguny współczynnika odbicia.

$$\rho(p) = \frac{\overbrace{\prod_{r=1}^n (p - \lambda'_r)}^{\text{FDP}}}{\prod_{r=1}^n (p - \lambda_r)} \xrightarrow{p \mapsto \beta(p+1/p)} \rho(p) = \overbrace{\prod_{r=1}^n \frac{\beta(p^2 + 1) - \lambda'_r}{\beta(p^2 + 1) - \lambda_r}}^{\text{FPP}}$$

$$-\int_0^\infty \ln |\rho(\omega)| d\omega = \frac{\pi}{2} \sum_{r=1}^n \left(\overbrace{\Lambda'_{1r} + \Lambda'_{2r}}^{\lambda'_r/\beta} \underbrace{-\Lambda_{1r} - \Lambda_{2r}}_{-\lambda_r/\beta} \right)$$

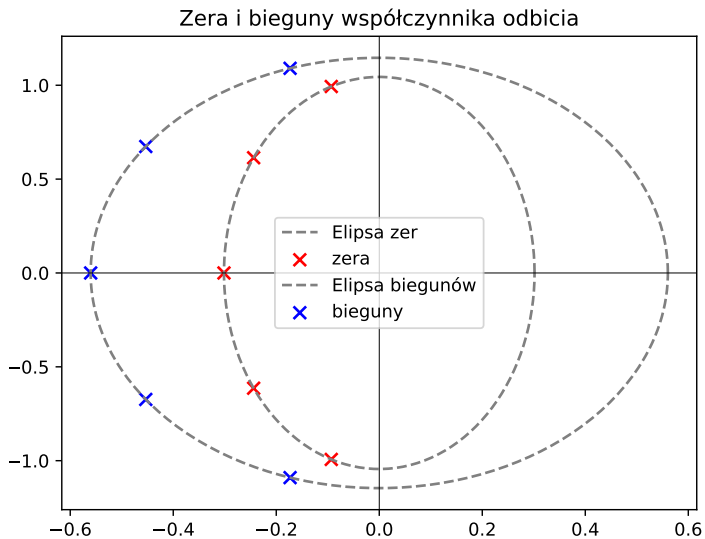
$$\sum_{r=1}^n (\lambda'_r - \lambda_r) = \frac{1}{\underbrace{\pi \cdot W \cdot R_S C_S}_{\text{poszerzenie pasma } \delta_W}}$$

W szerokość pasma, w którym następuje dopasowanie (Hz);

λ'_r zera minimalnofazowego współczynnika odbicia FDP;

λ_r bieguny współczynnika odbicia prototypowego FDP.

Obwód minimalnofazowy



$$\sum_{r=1}^n (\lambda'_r - \lambda_r) \leq \frac{1}{\pi \cdot W \cdot R_S C_S} \leq \sum_{r=1}^n (-\lambda'_r - \lambda_r)$$

W szerokość pasma, w którym następuje dopasowanie (Hz);

λ'_r zera minimalnofazowego współczynnika odbicia FDP;

λ_r bieguny współczynnika odbicia prototypowego FDP.

$$-\int_0^{\infty} \ln |\rho(\omega)| d\omega \leq \frac{1}{\pi \cdot W \cdot R_S C_S}$$

Równość zachodzi dla obwodu o minimalnofazowym współczynniku odbicia.

Prototypowy filtr Czebyszewa

$$\left. \begin{aligned} \lambda'_r &= -j \cos \left(\sin^{-1} j\xi + (2r-1)\pi/2n \right) \\ \lambda_r &= -j \cos \left(\sin^{-1} j\eta + (2r-1)\pi/2n \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{dla } r = 1, 2, \dots, n$$

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \sinh \left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \right) \\ \xi &= \sinh \left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{\sqrt{1-A}}{\varepsilon} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \eta \geq \xi > 0$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\eta - \xi} \geq \delta_W \geq \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\eta + \xi}$$

Lewa równość zachodzi dla obwodu o minimalnofazowym współczynniku odbicia.

$$\eta, \xi = \arg \min_{\eta \geq \xi > 0} \rho_{\max}^2$$

dla

$$\eta - \xi = \text{const.} = \mathcal{C}$$

$$\eta, \xi = \arg \min_{\eta \geq \xi > 0} \frac{1 + \sinh^2(n \cdot \sinh^{-1} \xi)}{1 + \sinh^2(n \cdot \sinh^{-1} \eta)}$$

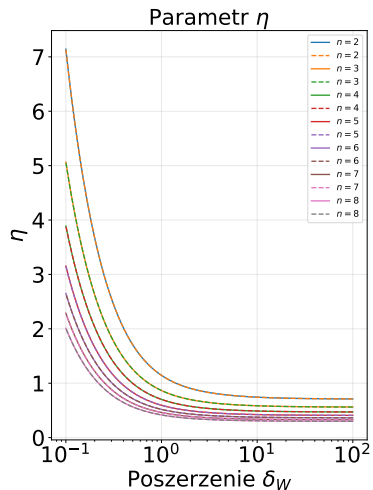
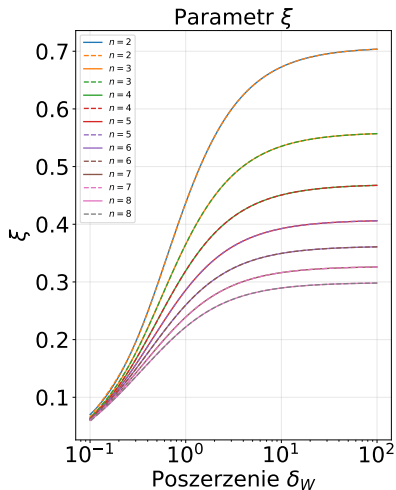
dla

$$\eta - \xi = \mathcal{C} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\delta_W}$$

$$\frac{\tanh \left(n \cdot \sinh^{-1} \xi \right)}{\tanh \left(n \cdot \sinh^{-1} \eta \right)} = \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{1 + \eta^2}}$$

$$\eta - \xi = \mathcal{C}$$

Rozwiązanie numeryczne



Asymptota η dla $\delta_W \rightarrow 0$

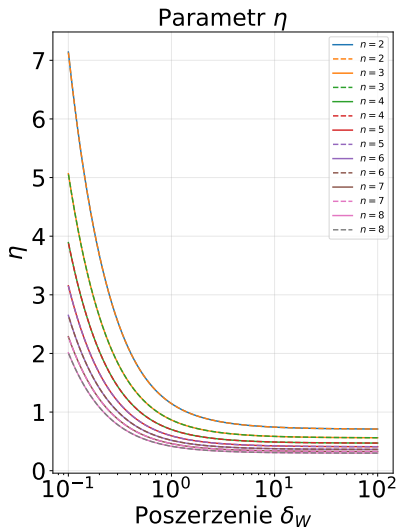
$$\delta_W \rightarrow 0 \quad \equiv \quad \mathcal{C} \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} \frac{\tanh(n \cdot \sinh^{-1}(\eta - \mathcal{C}))}{\tanh(n \cdot \sinh^{-1} \eta)} &= \sqrt{\frac{1 + (\eta - \mathcal{C})^2}{1 + \eta^2}} \\ n \cdot \frac{(\eta - \mathcal{C})}{\tanh(n \cdot \sinh^{-1} \mathcal{C})} &\approx \frac{1}{\sqrt{1 + \mathcal{C}^2}} + \frac{\mathcal{C} \cdot (\eta - \mathcal{C})}{(1 + \mathcal{C}^2)^{3/2}} \\ \eta &\approx \mathcal{C} + \frac{(\mathcal{C}^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \cdot \tanh(n \cdot \sinh^{-1}(\mathcal{C}))}{n \cdot (1 + \mathcal{C}^2)^2 + \mathcal{C} \cdot \sqrt{\mathcal{C}^2 + 1} \cdot \tanh(n \cdot \sinh^{-1}(\mathcal{C}))} \\ \eta &\approx \mathcal{C} + \frac{1}{n \cdot \mathcal{C}} \end{aligned}$$

Asymptota η dla $\delta_W \rightarrow \infty$

$$\delta_W \rightarrow \infty \quad \equiv \quad \mathcal{C} \rightarrow 0$$

$$\frac{\tanh(n \cdot \sinh^{-1}(\eta - \mathcal{C}))}{\tanh(n \cdot \sinh^{-1} \eta)} = \sqrt{\frac{1 + (\eta - \mathcal{C})^2}{1 + \eta^2}}$$
$$\mathcal{C} \cdot \left(\frac{n \tanh(n \operatorname{asinh}(\eta))}{\sqrt{\eta^2 + 1}} - \frac{n}{\sqrt{\eta^2 + 1} \tanh(n \operatorname{asinh}(\eta))} \right) + 1 \approx -\frac{\eta \cdot \mathcal{C}}{\eta^2 + 1} + 1$$
$$2n = \frac{\eta \cdot \sinh(2n \cdot \sinh^{-1} \eta)}{\sqrt{1 + \eta^2}}$$



$$\frac{\eta}{\text{asymptota}} = \frac{\delta_W^3 + a_2 \delta_W^2 + a_1 \delta_W + a_0}{\delta_W^3 + b_1 \delta_W^2 + b_0 \delta_W}$$

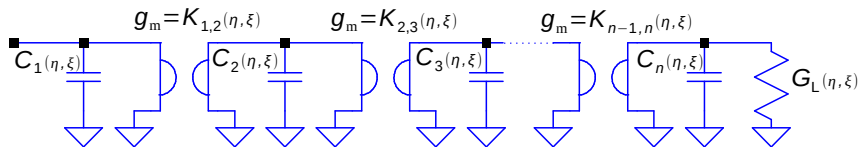
Tabela: $\eta = \text{asyp.} \times \frac{\delta_W^3 + a_2 \delta_W^2 + a_1 \delta_W + a_0}{\delta_W^3 + b_1 \delta_W^2 + b_0 \delta_W}$

$n = 2$	$a_2 = 0,9248$	$a_1 = 0,4567$	$a_0 = 0,1182$
	$b_1 = 0,4248$	$b_0 = 0,12$	asyp. = 0,7071
$n = 3$	$a_2 = 0,8972$	$a_1 = 0,4236$	$a_0 = 0,1039$
	$b_1 = 0,4504$	$b_0 = 0,1176$	asyp. = 0,5596
$n = 4$	$a_2 = 0,9202$	$a_1 = 0,4302$	$a_0 = 0,1041$
	$b_1 = 0,5126$	$b_0 = 0,1286$	asyp. = 0,4694
$n = 5$	$a_2 = 0,9667$	$a_1 = 0,453$	$a_0 = 0,1097$
	$b_1 = 0,5876$	$b_0 = 0,1455$	asyp. = 0,4076
$n = 6$	$a_2 = 1,016$	$a_1 = 0,4778$	$a_0 = 0,1159$
	$b_1 = 0,6585$	$b_0 = 0,1632$	asyp. = 0,3621

$$C_r = \frac{2 \sin\left(\frac{(2r-1)\pi}{2n}\right)}{\eta - \xi}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad \Leftarrow \quad \text{Jak z twierdzenia Fano}$$

$$K_{r,r+1} = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 2\eta\xi \cos\left(\frac{\pi r}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi r}{n}\right)}}{\eta - \xi}, \quad r = 1, 2, \dots, n-1$$

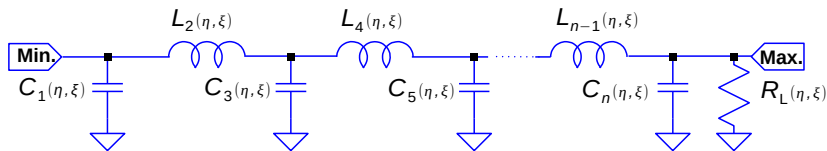
$$G_L = \frac{\eta + \xi}{\eta - \xi}$$



$$C_1 = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\eta - \xi},$$

$$X_r \cdot X_{r+1} = \frac{4 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{2r+1}{2n}\right) \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{2r-1}{2n}\right)}{\xi^2 + \eta^2 - 2 \cdot \eta \cdot \xi \cdot \cos\left(\frac{\pi r}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi r}{n}\right)}, \quad r = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$C_n \cdot R_L = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\eta + \xi}.$$



$$\frac{4 \cdot R_S R_L}{(R_S + R_L)^2} = \begin{cases} \frac{A}{1 + \varepsilon^2} & \text{gdy } n \text{ parzyste} \\ A & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \end{cases} \quad \Leftarrow \quad \text{dla składowej DC}$$

$$R_L = \begin{cases} \frac{\cosh(n \cdot \sinh^{-1} \eta) - \cosh(n \cdot \sinh^{-1} \xi)}{\cosh(n \cdot \sinh^{-1} \eta) + \cosh(n \cdot \sinh^{-1} \xi)} & \text{gdy } n \text{ parzyste} \\ \frac{\sinh(n \cdot \sinh^{-1} \eta) - \sinh(n \cdot \sinh^{-1} \xi)}{\sinh(n \cdot \sinh^{-1} \eta) + \sinh(n \cdot \sinh^{-1} \xi)} & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\eta - \xi}, \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{L_n}{R_L} & \text{gdy } n \text{ parzyste} \\ C_n \cdot R_L & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \end{array} \right\} = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\eta + \xi}$$

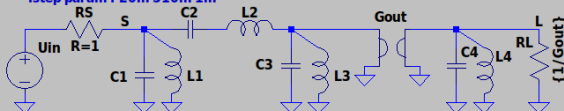
$$R_L = \begin{cases} \frac{L_n}{C_1} \cdot \frac{\eta + \xi}{\eta - \xi} & \text{gdy } n \text{ parzyste} \\ \frac{C_1}{C_n} \cdot \frac{\eta - \xi}{\eta + \xi} & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

Projekt idealny żyrator / linia ćwierćfalowa

Filtr dopasowujący pasmowy Czebyszewa (c) Jacek I. 12.01.2026 r.

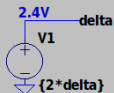
* IDEOLO vs sprzęż. POJEMN.
.param w=2*pi*f=1/2/pi
.ac list {1/2/pi}
.step param f 120m 210m 0.25m
* .step param f 20m 510m 1m

* Wersja sprzęż. LINIA vs. POJ.
.param w=1
.ac lin 500 120m 210m
* .ac lin 500 20m 510m



*** PARAMETRY OBWODU ===

* Rząd-Pasmo-Oporność Źródła-Pojemność Źródła
.params N=4 B=95MegHz RS=500ohm CS=8pF
* Poszerzenie pasma
.params delta=pi*B*RS*CS
* Przewodność wyjściowa-transkon
.params Rout=75ohm Gout={RS/Rout}
* Dobroć-transkonduktancja
.param beta=4.5 gm=sqrt(GL*Gout)

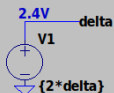


*** PROTOTYP ===

.params eta=EtaFunc(delta)
.params xi=eta-sin(pi/2/N)/delta
.params eps=1/sinh(N*asinh(eta))
.params A = 1 - eps**2*sinh(N*asinh(xi))**2
.params ro2x = 1 - A/(1+eps**2)
.params swr = (1+sqrt(ro2x))/(1-sqrt(ro2x))
.params X1 = 2*sin(fi)/(eta-xi)
.params X2 = 4/X1*sin(fi)*sin(fi*3)/fu(1)
.params X3 = 4/X2*sin(fi*3)*sin(5*fi) / fu(2)
.params X4 = 4/X3*sin(5*fi)*sin(7*fi) / fu(3)
.params GL = swr

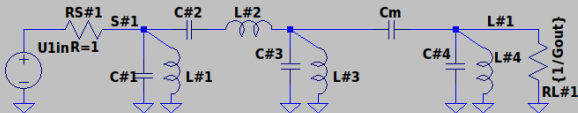
Projekt aproksymacja żyratora pojemnościami

```
.params delta=pi*B*RS*CS
* Przewodność wyjściowa-transkon
.params Rout=75ohm Gout={RS/Rout}
* Dobroć-transkonduktancja
.param beta=4.5 gm=sqrt(GL*Gout)
```

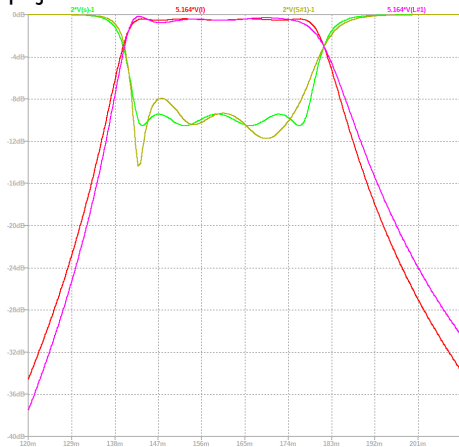


```
* Funkcja Eta
.params a2 = 0.9202 a1 = 0.4302 a0 = 0.1041
.params b1 = 0.5126 b0 = 0.1286 skala = 0.4694
.func EtaFunc(x) {skala*(x**3 + a2*x**2 + a1*x + a0) / (x**3 + b1*x**2 + b0*x)}
* Funkcja łańcuchowa
.param fi = pi/2/N
.func fu(m) {eta**2+xi**2+sin(fi*2*m)**2-2*eta*xi*cos(fi*2*m)}
```

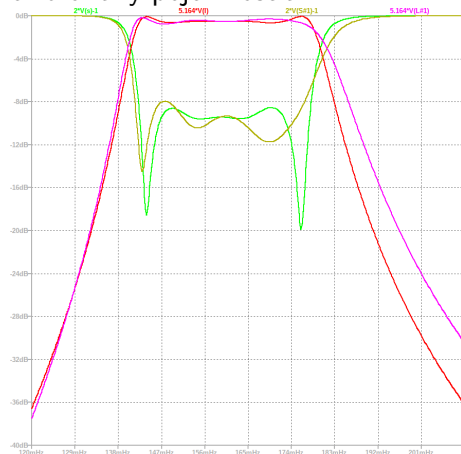
```
.params A = 1 - eps**2*sinh(N*asinh(xi))**2
.params ro2x = 1 - A/(1+eps**2)
.params swr = (1+sqrt(ro2x))/(1-sqrt(ro2x))
.params X1 = 2*sin(fi)/(eta-xi)
.params X2 = 4/X1*sin(fi)*sin(fi*3)/fu(1)
.params X3 = 4/X2*sin(fi*3)*sin(5*fi) / fu(2)
.params X4 = 4/X3*sin(5*fi)*sin(7*fi) / fu(3)
.params GL = swr
```



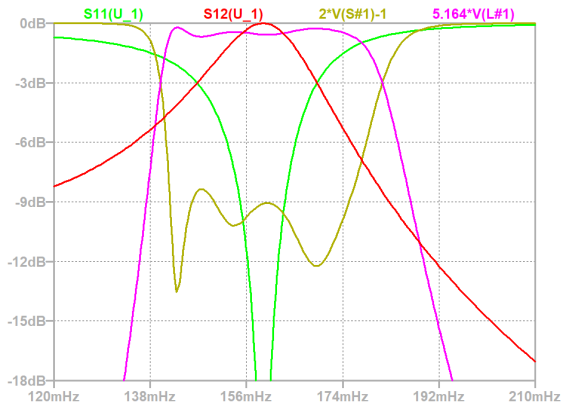
Żyrator idealny vs emulowany pojemnościami



Linia ćwierćfalowa vs żyrator emulowany pojemnościami



Przykład vs. π – match



$$\Delta f_{9\text{dB}} = 7,7 \text{ mHz} \quad \Leftarrow \quad \pi - \text{match}$$

$$\Delta f_{9\text{dB}} = 33,5 \text{ mHz} \quad \Leftarrow \quad \text{Czebyszew}$$

Karzeł widzący się na barkach olbrzymia, dla świata jest karłem z pretensjami alpinisty.

Jan Hartman
Zmierzch filozofii

K O N I E C