

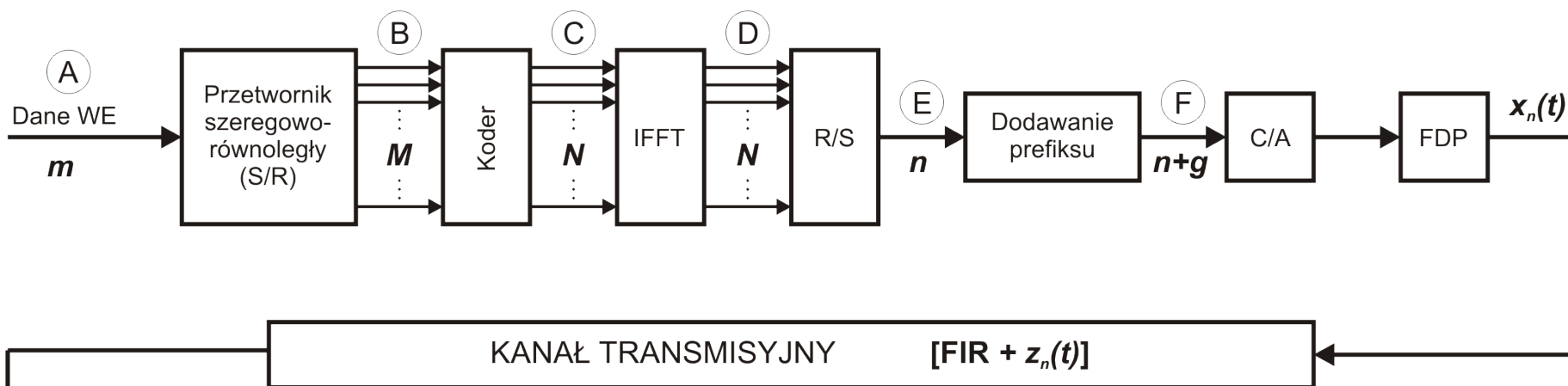


Korekcja kanału rzadkiego w systemie z modulacją OFDM

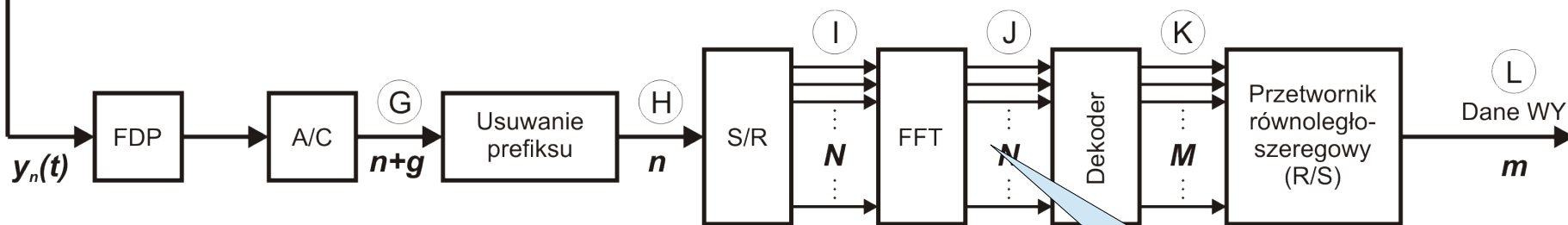
Marcin Kucharczyk
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki
Politechnika Śląska

System z modulacją OFDM

MODULACJA



KANAŁ TRANSMISYJNY [FIR + $z_n(t)$]

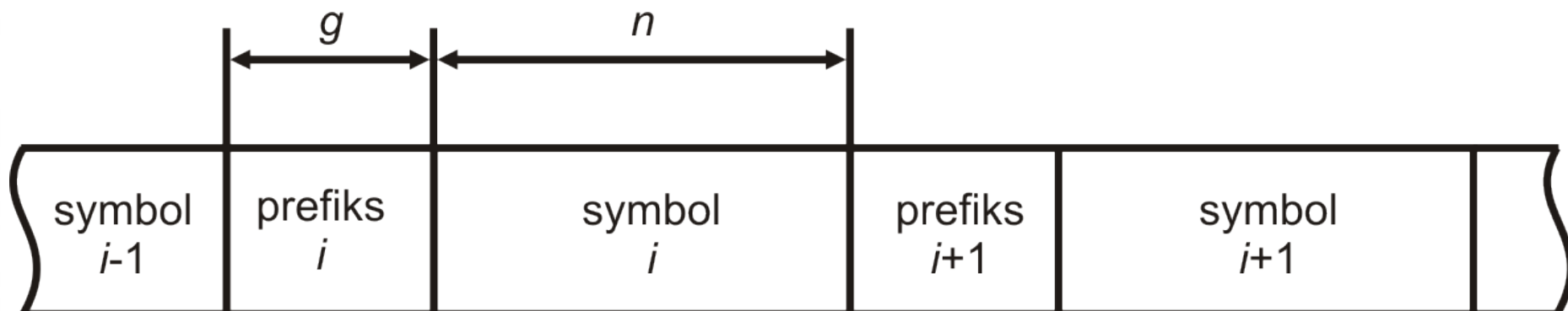


DEMODULACJA

Korektor

Ramka OFDM

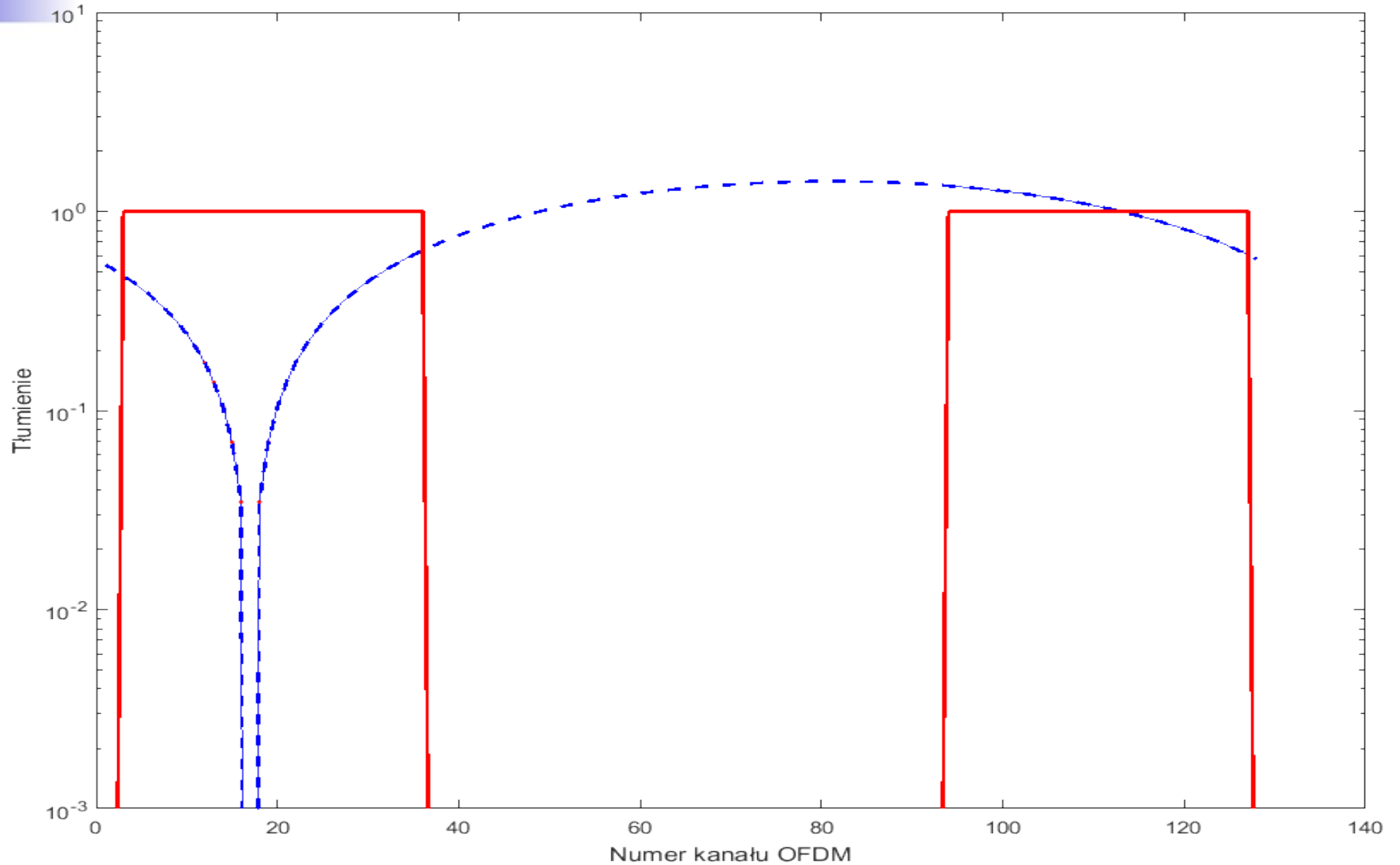
- FFT zapewnia ortogonalność kanałów (brak interferencji międzykanałowych).
- Celem okresu ochronnego (może to być prefiks cykliczny, ciąg zer, ustalona sekwencja czy też połączenie powyższych) jest eliminacja interferencji międzysymbolowych. Prefiks jest dłuższy niż długość odpowiedzi impulsowej kanału.



Pomiary i model kanału

- Modułacja OFDM z prefiksem cyklicznym (CP-OFDM), długość prefiksu stanowi 25% długości symbolu. Ramka składa się z 15 symboli.
- Pierwszy symbol w ramce to symbol treningowy i na jego podstawie wyznaczane są parametry korektora.
 - **Korektor implementowany jest w dziedzinie częstotliwości: wzmocnienie i przesunięcie fazowe w kolejnych kanałach systemu OFDM.**
- Na podstawie pomiarów kanał modelowany jest w postaci filtra FIR o dwóch współczynnikach zespolonych, co skutkuje głębokim zerem na charakterystyce częstotliwościowej kanału. „Obrót” drugiego współczynnika powoduje przesuwanie tego zera jest w paśmie transmisyjnym.

Przykładowa charakterystyka kanału



$$h = 0.5\delta(t) + 0.5e^{-j5\pi/4}\delta(t-t_s)$$

Korekcja kanału w OFDM

- Korektor (na bazie symbolu treningowego):

$$\mathbf{E}_{K \times 1} = \mathbf{X}_{K \times 1} \oslash \mathbf{Y}_{K \times 1} = \mathbf{1}_{K \times 1} \oslash \mathbf{H}_{K \times 1}$$

- Czyli w każdym z podkanałów:

$$E_k = \frac{X_k}{Y_k} = \frac{1}{H_k} \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, K$$

- Korekcja z wymuszeniem zera (Zero Forcing, ZF) w praktyce uzupełniania o uśrednianie szumu w algorytmie MMSE. Brak odniesienia do rzeczywistości co do modelu kanału.

Kanał w dziedzinie czasu

- Transformata FFT ($\mathbf{F}_{K \times N}$) umożliwia przejście na dziedzinę czasu:

$$\mathbf{H}_{K \times 1} = \mathcal{F}(\mathbf{h}_{N \times 1}) = \mathbf{F}_{K \times N} \mathbf{h}_{N \times 1}$$

- Czy też uwzględniając dane treningowe:

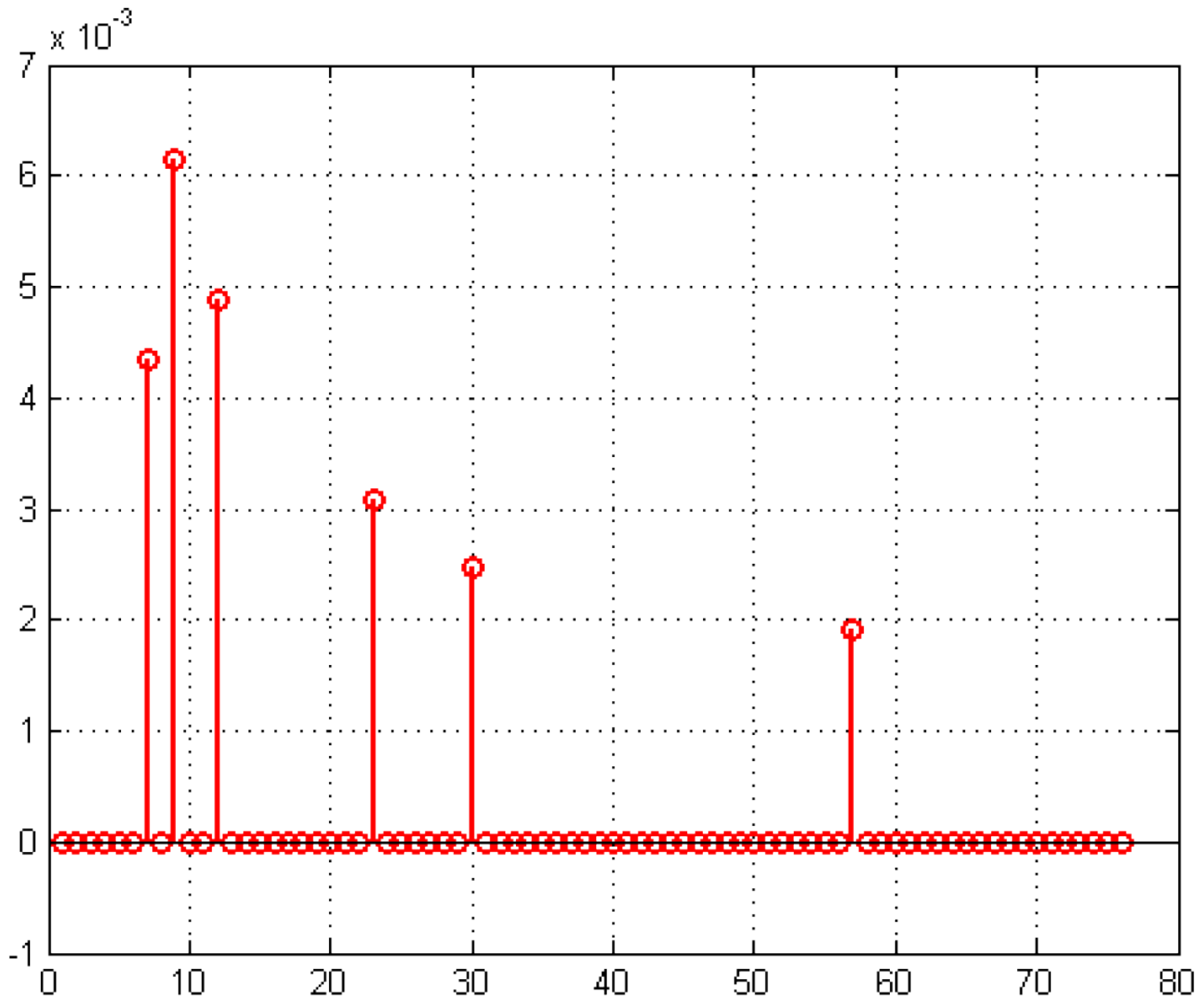
$$\mathbf{Y}_{K \times 1} = \mathbf{X}_{K \times 1} \odot \mathcal{F}(\mathbf{h}_{N \times 1}) = \mathbf{X}_{K \times 1} \odot \mathbf{F}_{K \times N} \mathbf{h}_{N \times 1}$$

- I w końcu uwzględniając szum:

$$\mathbf{H}_{K \times 1} = \mathbf{F}_{K \times N}(\mathbf{h}_{N \times 1} + \mathbf{e}_{N \times 1}) = \mathbf{F}_{K \times N} \mathbf{h}_{N \times 1} + \mathbf{E}_{K \times 1}$$

- Na podstawie literatury: Kanał opisany jako $\mathbf{h}_{N \times 1}$ ma skończoną długość, max 6 prążków, które odzwierciedlają odbicia sygnału.

Przykład (copyright G.D.)



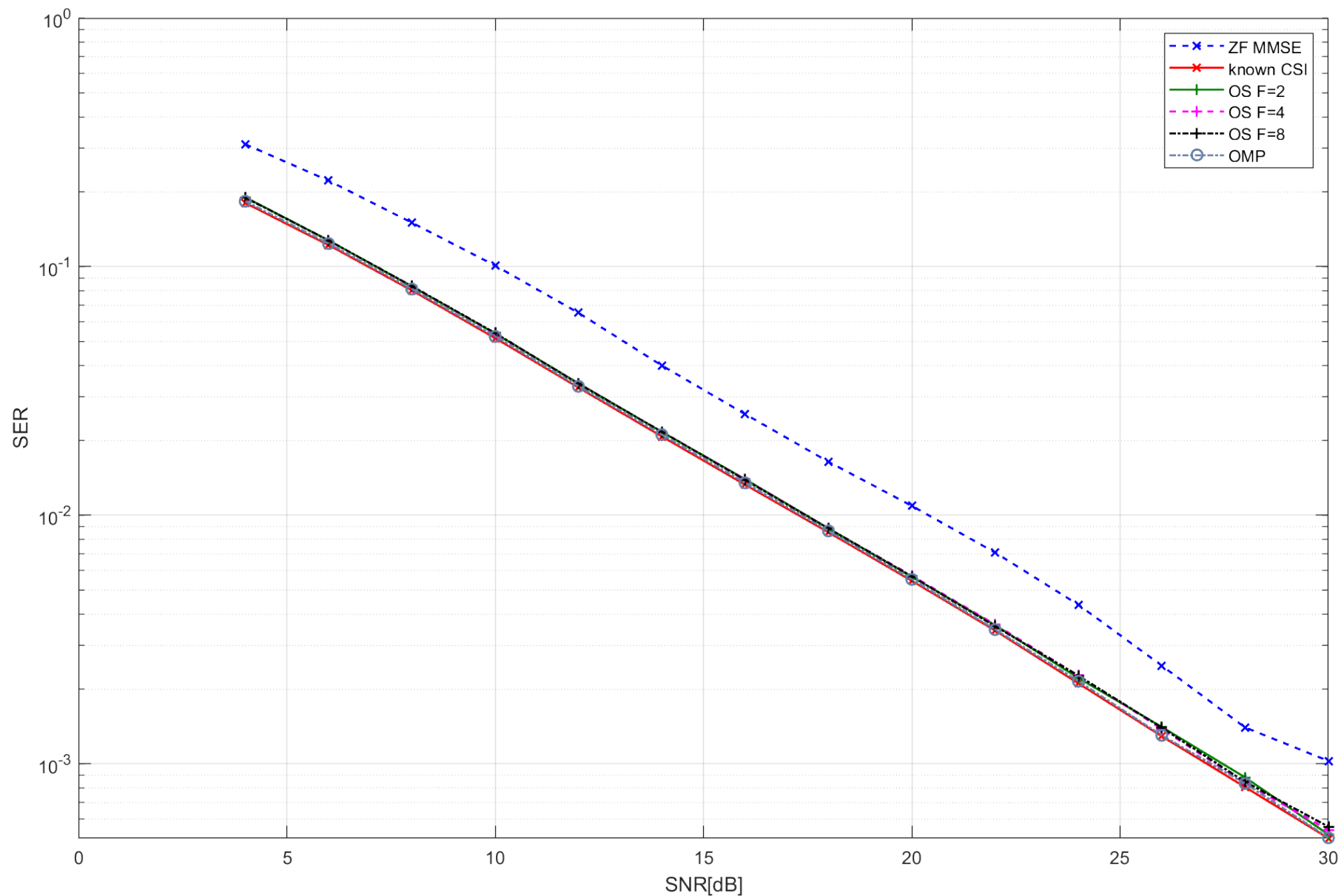
Algorytmy zachłanne

- Opisany model kieruje badania na algorytmy zachłanne (greedy algorithms), które służą do wyszukiwania parametrów sygnału rzadkiego:

$$\min \|\mathbf{h}_{N \times 1}\|_{\ell_0} \text{ subject to } \|\mathbf{F}_{K \times N} \mathbf{h}_{N \times 1} - \mathbf{H}_{K \times 1}\|_{\ell_2} \leq \epsilon$$

- Wiedząc, że liczba współczynników kanału jest skończona znajdziemy ich pozycje. A następnie określimy wartości tych współczynników minimalizując błąd średniokwadratowy, czyli obliczamy wartości współczynników algorytmem LS (Least Squares). Tak działają OMP i CoSaMP.

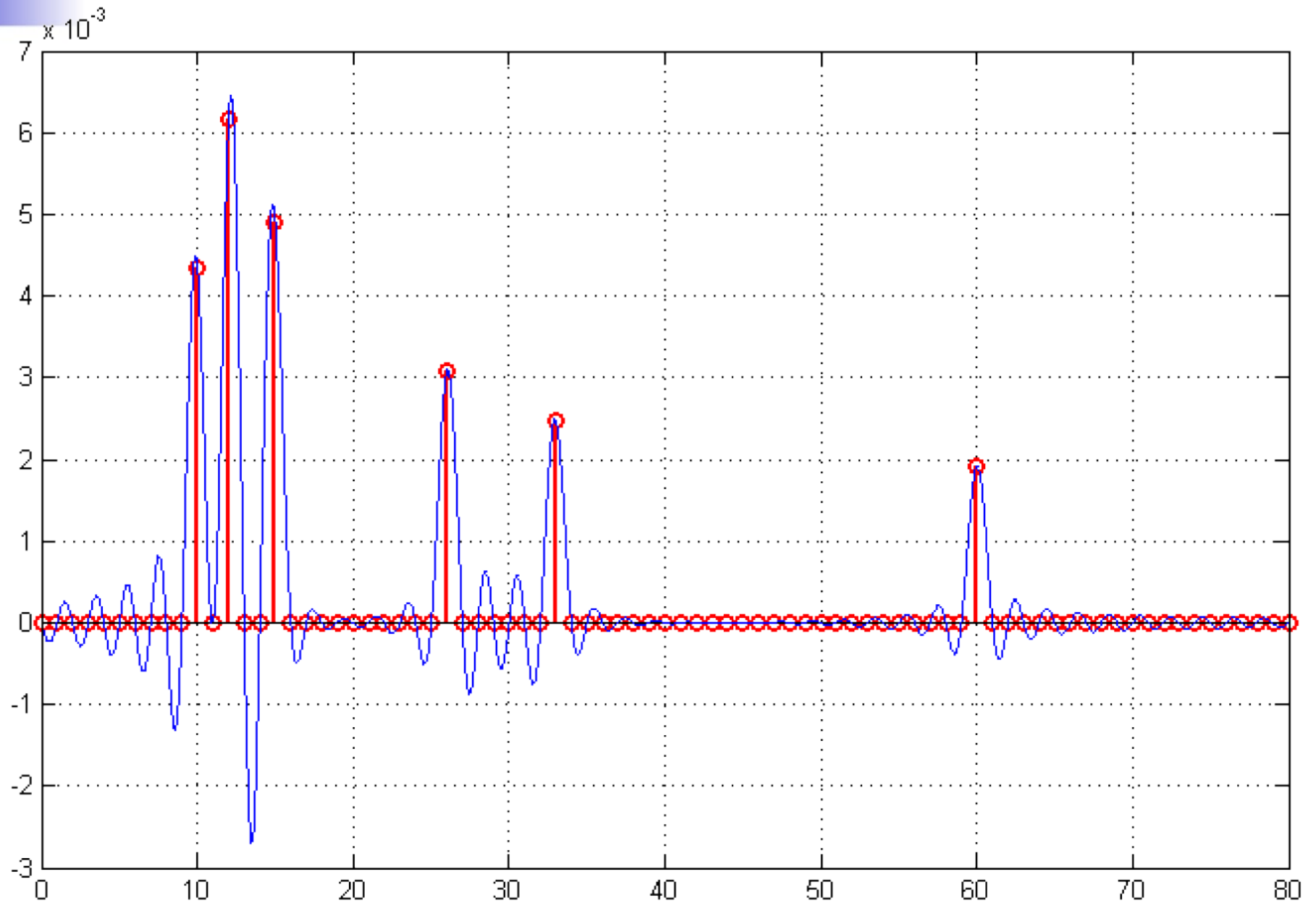
OMP: ścieżki w siatce próbkowania



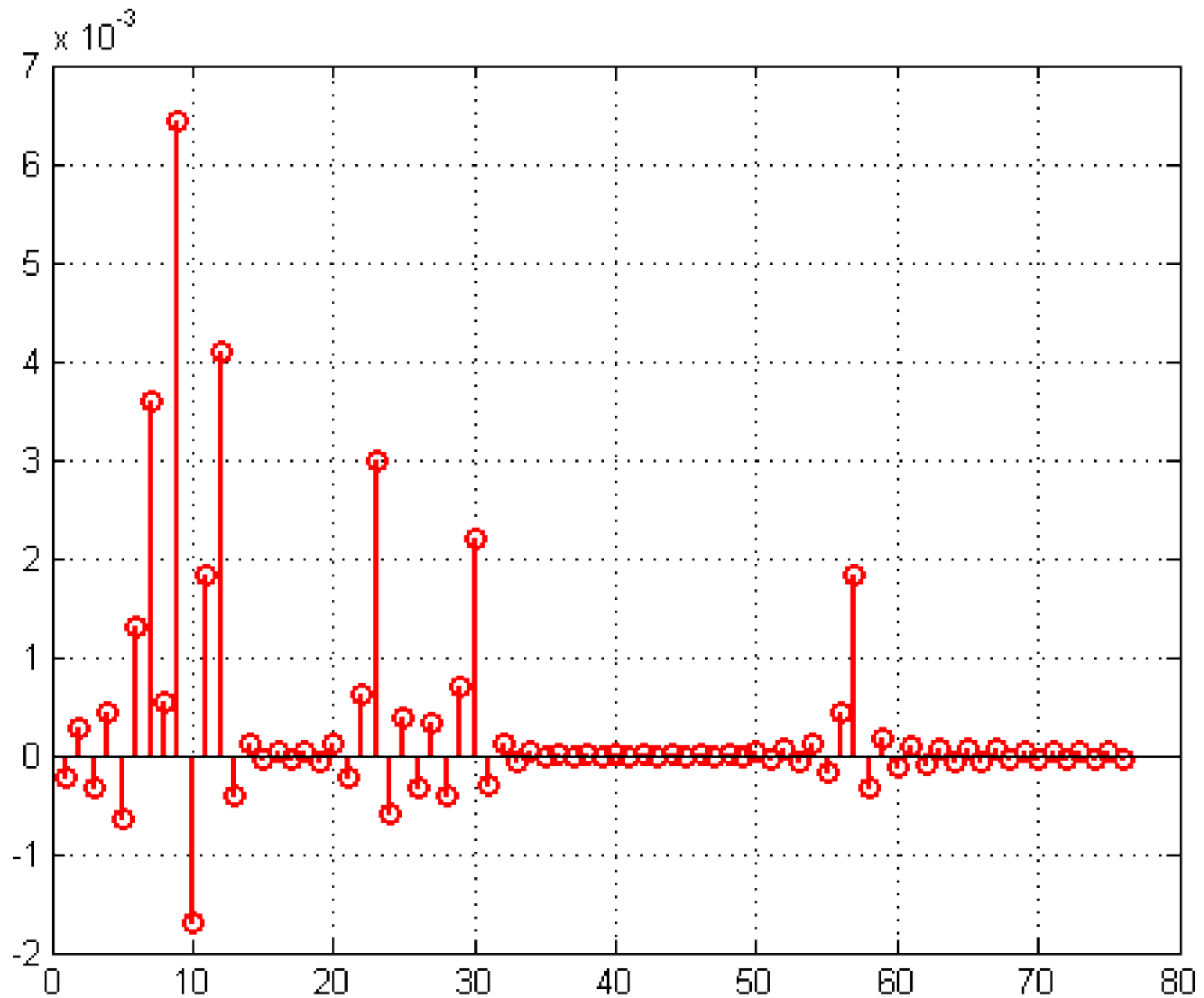
Co znaczy: w siatce próbkowania?

- W najprostszym przybliżeniu modelu:
 - opóźnienie t_s jest równe okresowi próbkowania;
 - układy próbkujące nadajnika i odbiornika są idealnie zsynchronizowane zarówno jak chodzi o częstotliwość i „moment” wysłania/pobrania próbki sygnału.
- Rzeczywistość jest nieco bardziej skomplikowana skutkiem czego w rzeczywistej odpowiedzi impulsowej można znaleźć więcej prążków.
- Problem do analizy: Jak na podstawie danych treningowych w dziedzinie częstotliwości odtworzyć rzeczywistą odpowiedź impulsową kanału?

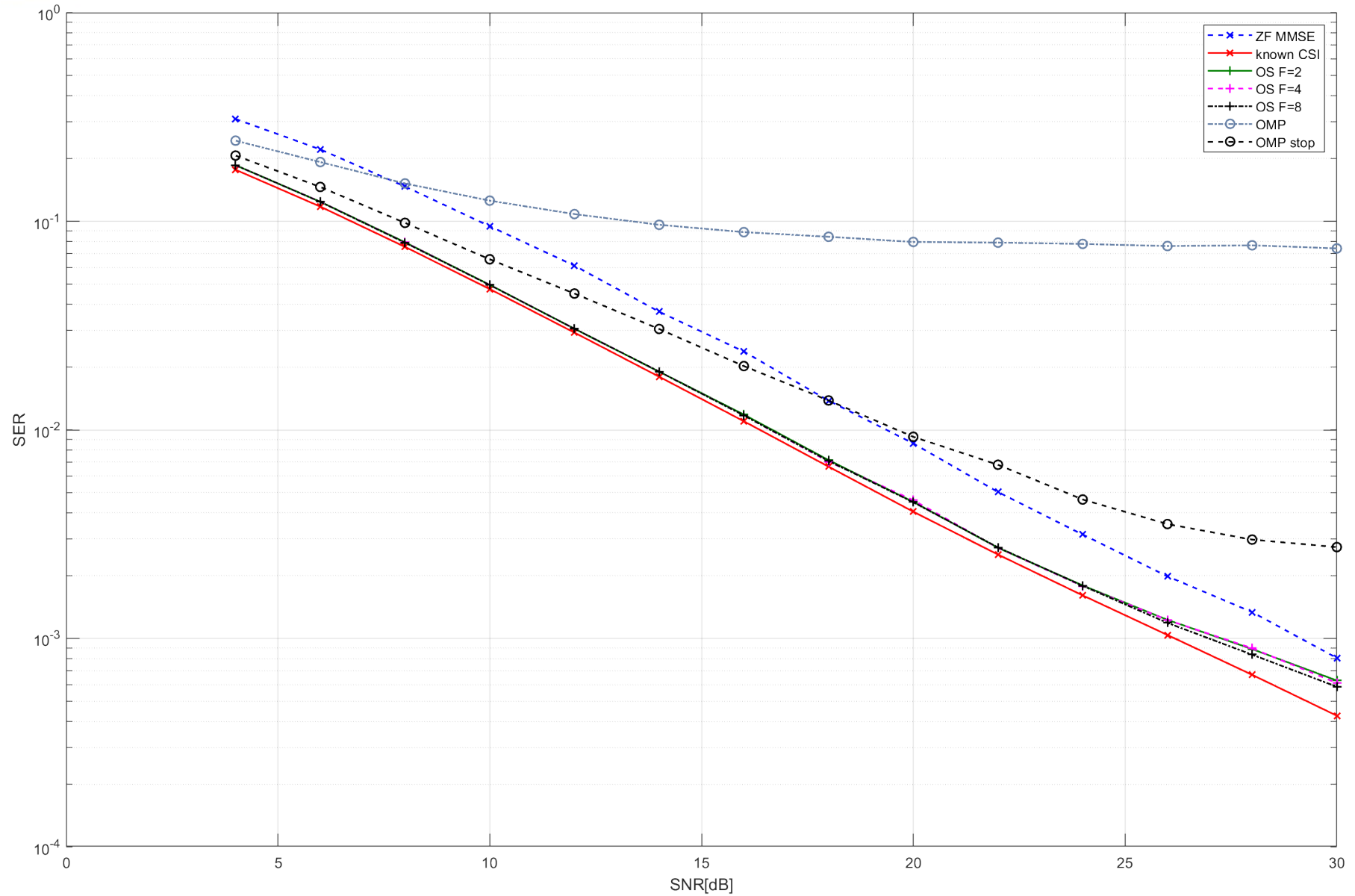
Przykład (copyright G.D.)



Przykład (copyright G.D.)



OMP: ścieżki poza siatką



Out of the grid ... i co dalej?

- Pomysł: Gdyby znaleźć rzeczywiste opóźnienia ścieżek, to może dałoby się odtworzyć rzeczywistą odpowiedź kanału?
- Nadpróbkowanie: Zwiększamy sztucznie częstotliwość próbkowania wstawiając próbki zerowe i filtrujemy sygnał.

$$\mathbf{Y}_{K \times 1} = \mathbf{X}_{K \times 1} \odot \mathbf{F}_{K \times N} \mathbf{S}_{N \times T} \mathbf{h}_{T \times 1}$$

- We wzorze powyżej $\mathbf{h}_{T \times 1}$ to odpowiedź impulsowa kanału, natomiast $\mathbf{S}_{N \times T}$ to filtr przez jaki przepuszczamy sygnał podczas obliczania parametrów korektora.

Modyfikacja OMP

- Ogólnie algorytm OMP można stosować przy odpowiedniej postaci macierzy detekcyjnej \mathbf{A} :

$$\mathbf{s}_y = \mathbf{A}\mathbf{s}_x + \mathbf{s}_z$$

gdzie \mathbf{s}_z to szum a \mathbf{s}_x odpowiedź impulsowa.

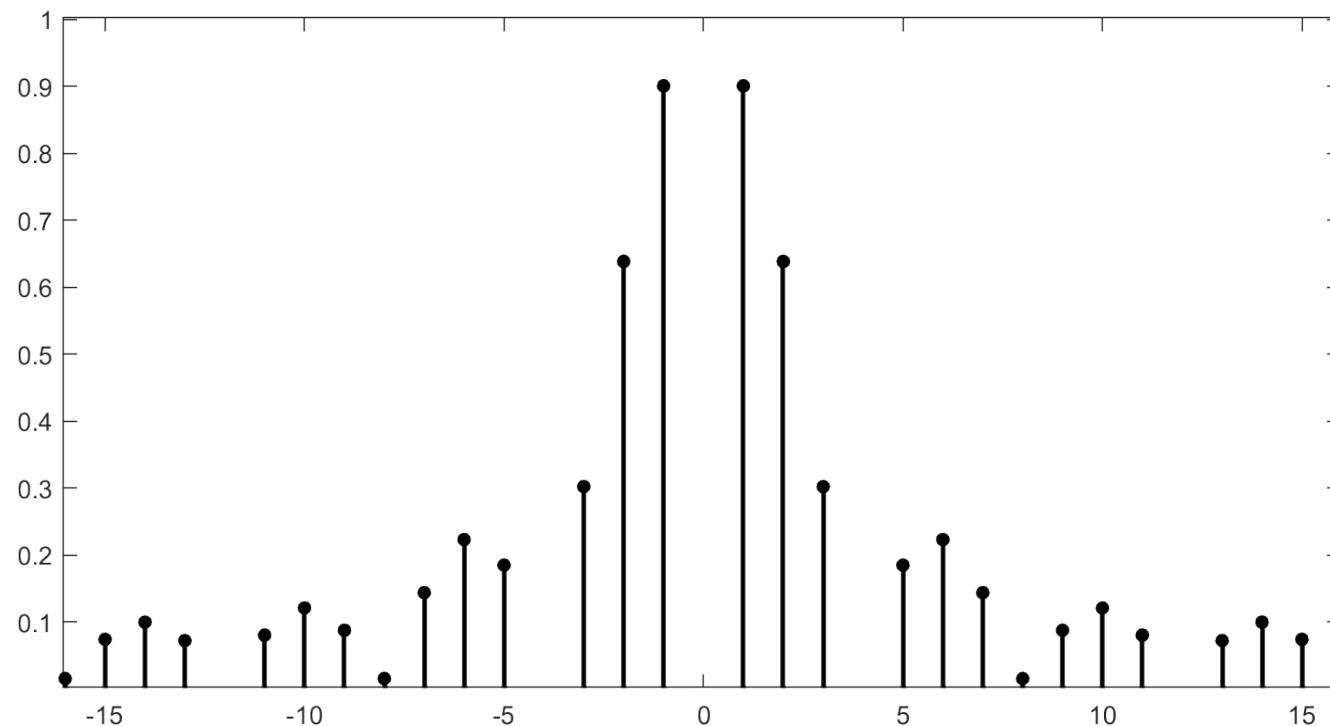
- Tą „odpowiednią postać” można sprawdzić licząc:

$$\mu(\mathbf{A}) = \mu = \max_{i \neq j} \frac{|\mathbf{a}_i^H \mathbf{a}_j|}{\|\mathbf{a}_i\|_{\ell_2} \|\mathbf{a}_j\|_{\ell_2}}$$

- W bazowej wersji algorytmu macierzą \mathbf{A} była macierz FFT ($\mathbf{F}_{K \times N}$) po implementacji nadpróbkowania jest nią macierz $\mathbf{F}_{K \times N} \mathbf{S}_{N \times T}$

Czy można stosować OMP?

- Macierz FFT może być stosowana w algorytmach zachłannych ($\mu=0$), jednak po nadpróbkowaniu pojawia się problem: Z rysunku wynika, że próbki w okolicach największej (0) są słabo rozróżnialne.

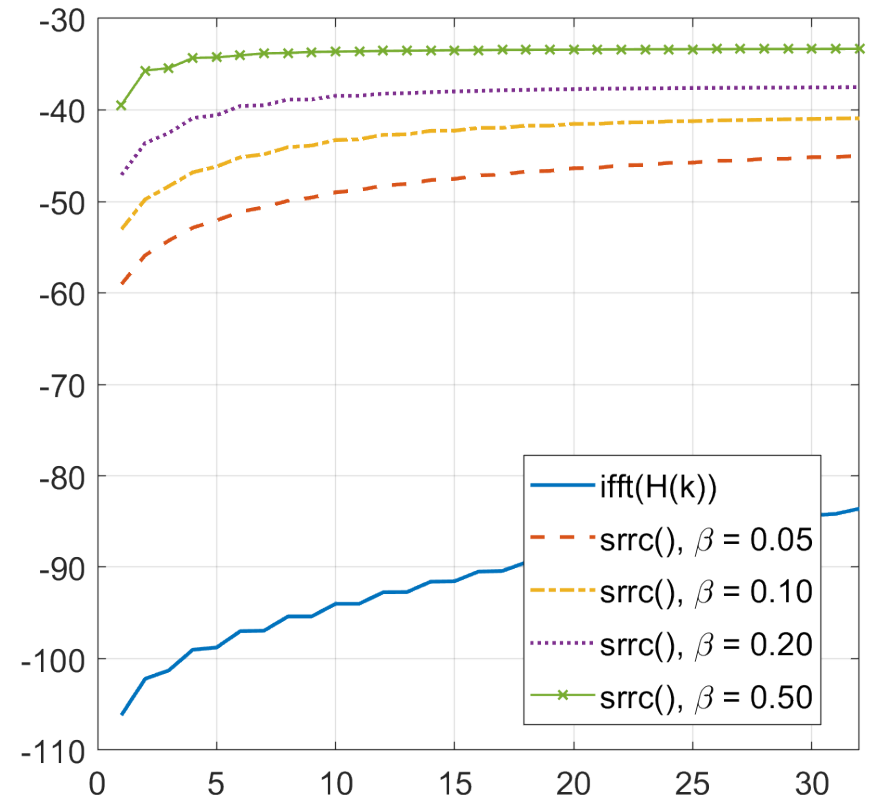
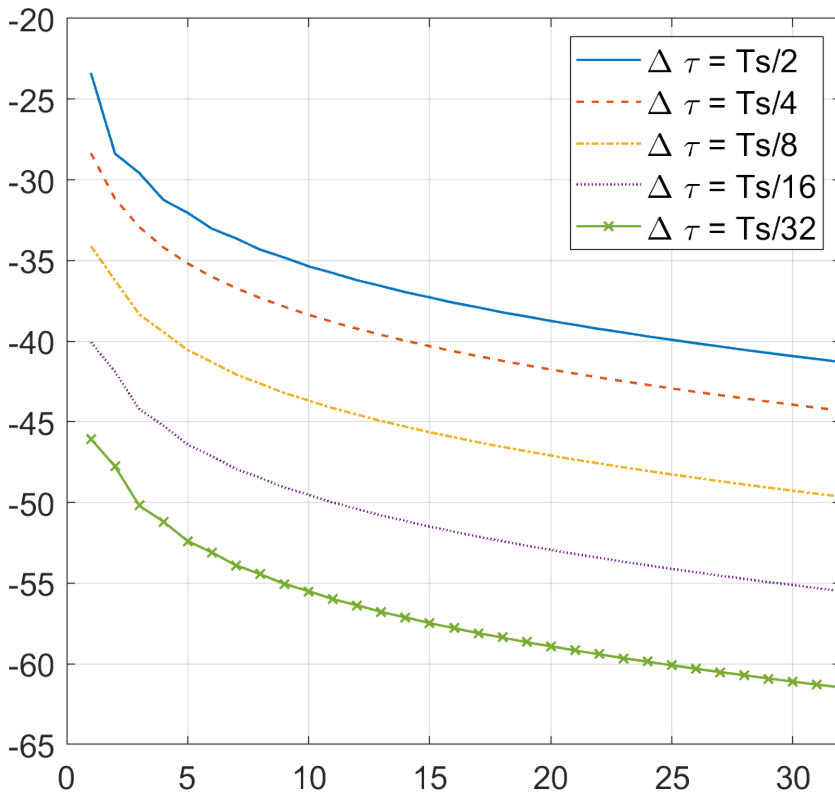


Filtr kształtujący (1)

- Filtr opisany jako $\mathbf{S}_{N \times T}$ używany jest w przedstawionym algorytmie dwukrotnie:
 - 1) Podczas tworzenia macierzy detekcyjnej A .
 - 2) Podczas obliczania współczynników korektora, czyli kiedy wracamy do odpowiedzi impulsowej o liczbie współczynników odpowiadającej rozmiarowi FFT.
- Ad. 1) Przedstawiony na poprzednim slajdzie rysunek dotyczący wartości μ dotyczy sytuacji gdzie filtr realizowany jest przez funkcję $\sin(x)/x$. W tym przypadku jakość wyszukiwania jest „najlepsza”.

Filtr kształtujący (2)

- Ad. 2) Błąd odtworzenia zależy od tego jakim filtrem w rzeczywistym systemie sygnał został zniekształcony oraz jakim go rekonstruujemy:
 - Gdy są takie same, to znaczenia ma jak dokładnie określimy wartość opóźnienia, ale więcej próbek oznacza mniejszy błąd (po lewej).
 - Gdy są różne, to lepiej wygenerować mniej próbek (po prawej).



Szum, czyli dlaczego OMP działa

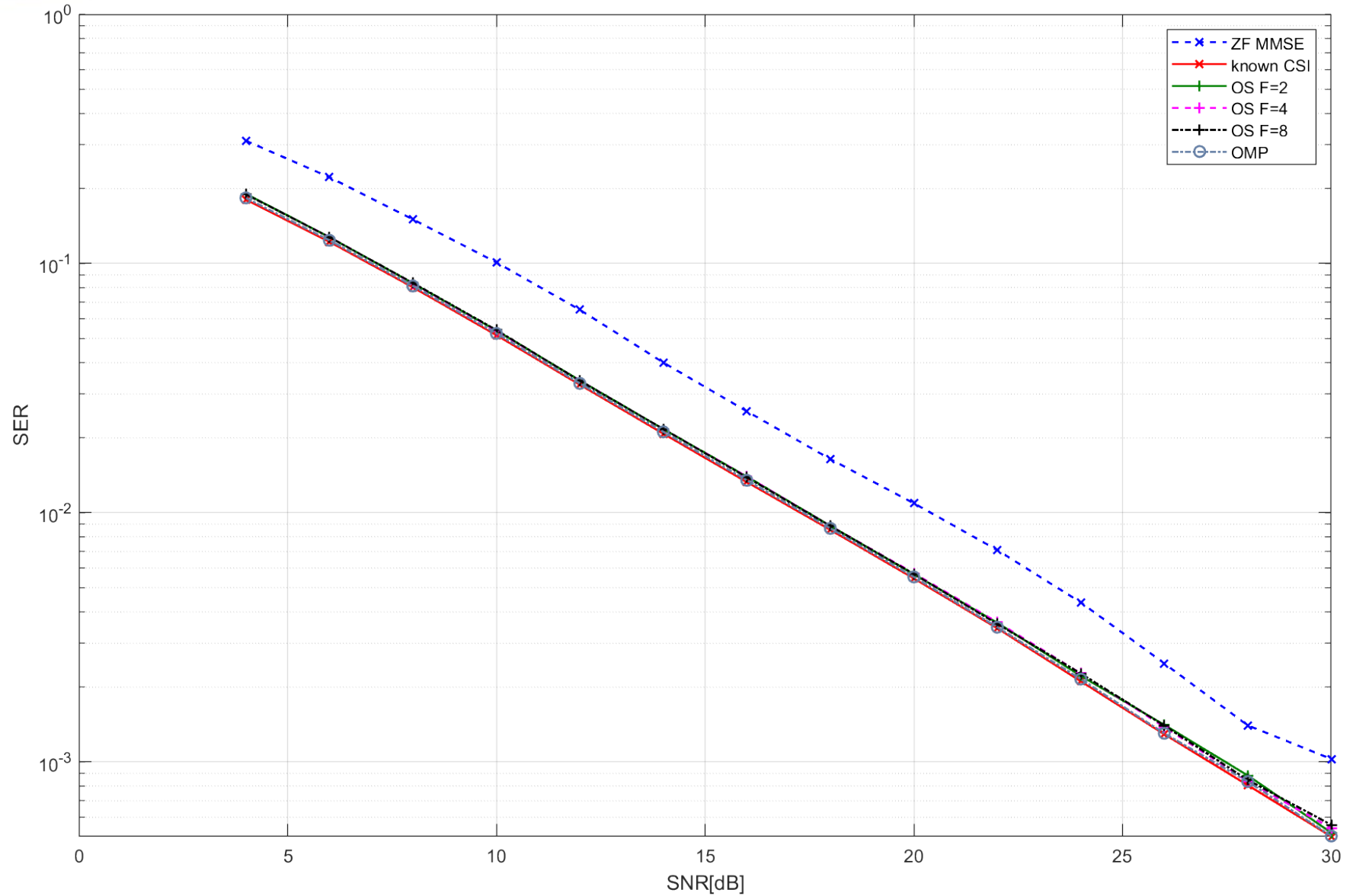
- Odpowiedź impulsowa wyliczona na podstawie danych treningowych ma długość N i przyjmijmy, że błąd (powodowany szumem) w tym przypadku jest równy MSE_0 .
- Jeżeli skrócimy odpowiedź impulsową, np. do długości prefiksu P , zerując pozostałe próbki to błąd zostanie zmniejszony do: $P/N \cdot MSE_0$.
- Używając algorytmu zachłannego, jak np. OMP, liczba współczynników niezerowych jest jeszcze mniejsza.
- Wynik za filtrem kształtującym jest dłuższy, ale również „wolny od szumu”.

- Parametry korektora wyznaczamy ze wzoru:

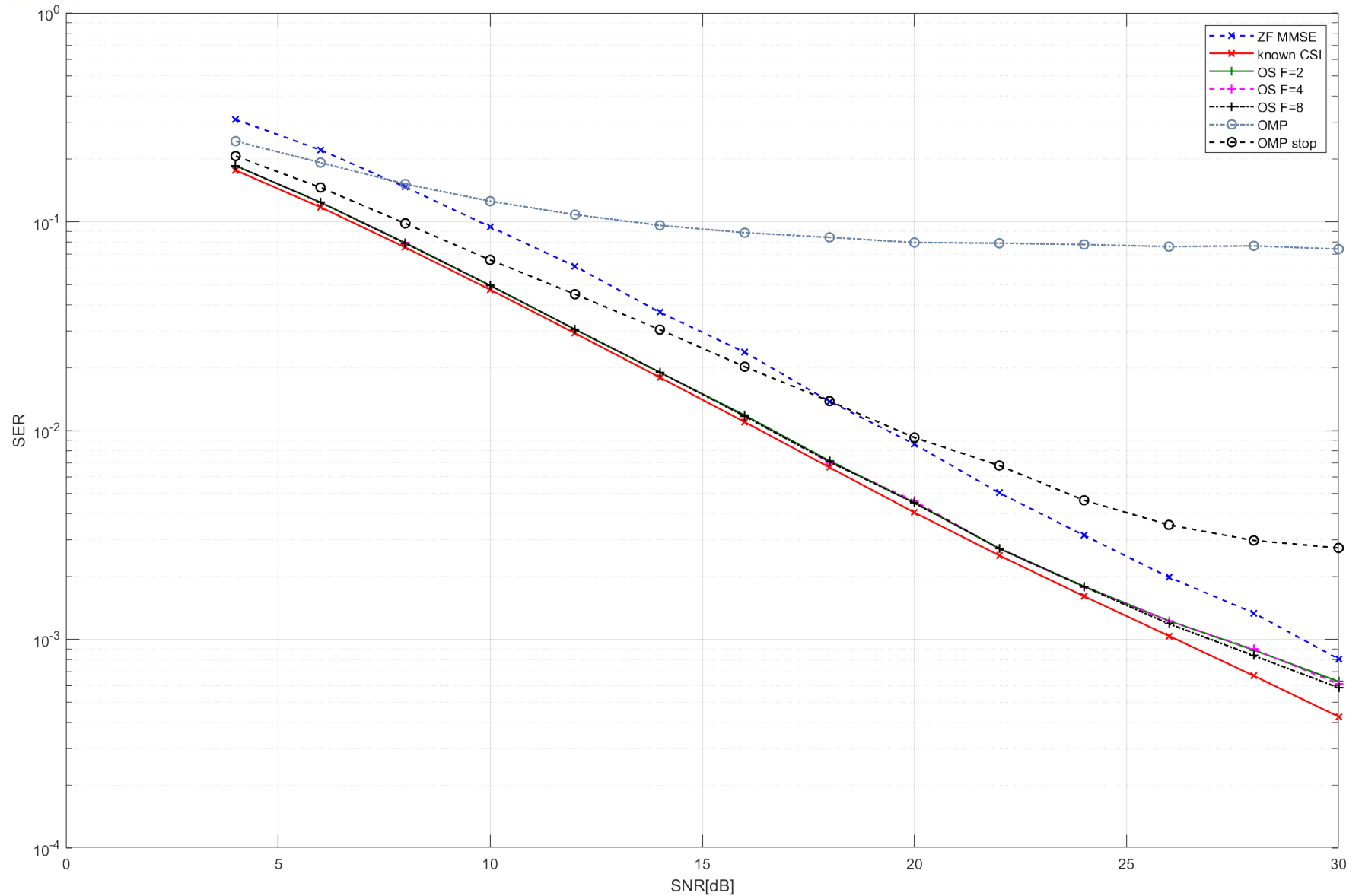
$$\mathbf{E}_{K \times 1} = \mathbf{1}_{K \times 1} \oslash (\mathbf{F}_{K \times N} \mathbf{S}_{N \times T} \mathbf{h}_{T \times 1})$$

- Wartości $\mathbf{h}_{T \times 1}$ obliczane są algorytmem OMP:
 - macierz detekcyjna to $\mathbf{A}_{K \times T} = \mathbf{F}_{K \times N} \mathbf{S}_{N \times T}$
 - na etapie wyszukiwania jako filtr \mathbf{S} stosowana jest funkcja $\sin(x)/x$
 - wynik wyszukiwania jest poszerzany o sąsiadów (ograniczona rozdzielczość \mathbf{h})
 - Po wyznaczeniu pozycji współczynników algorytm LS oblicza ich wartości.
- Podczas obliczania współczynników korektora filtr \mathbf{S} dopasowywany jest do modelu kanału.

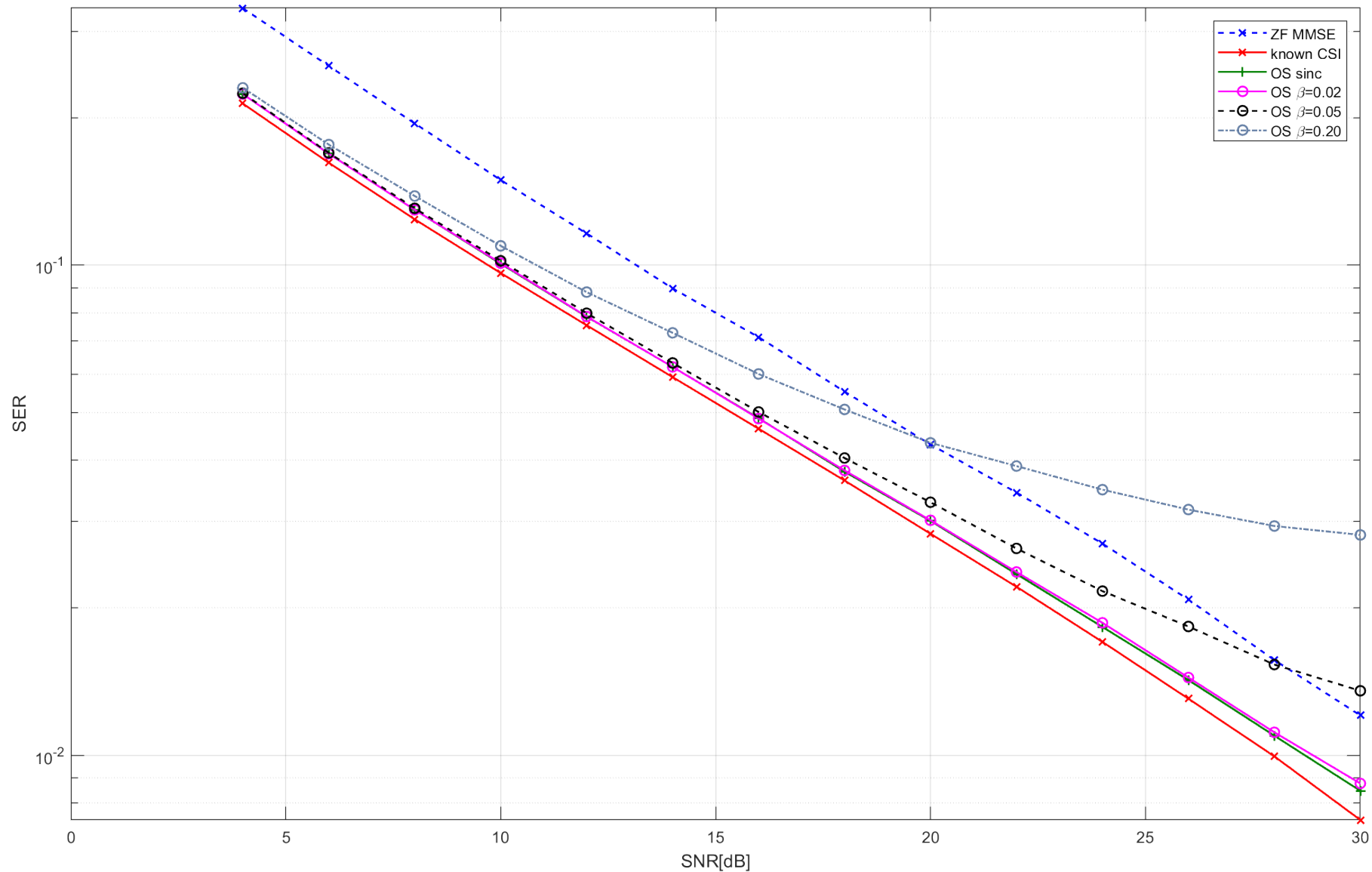
Wyniki: ścieżki w siatce



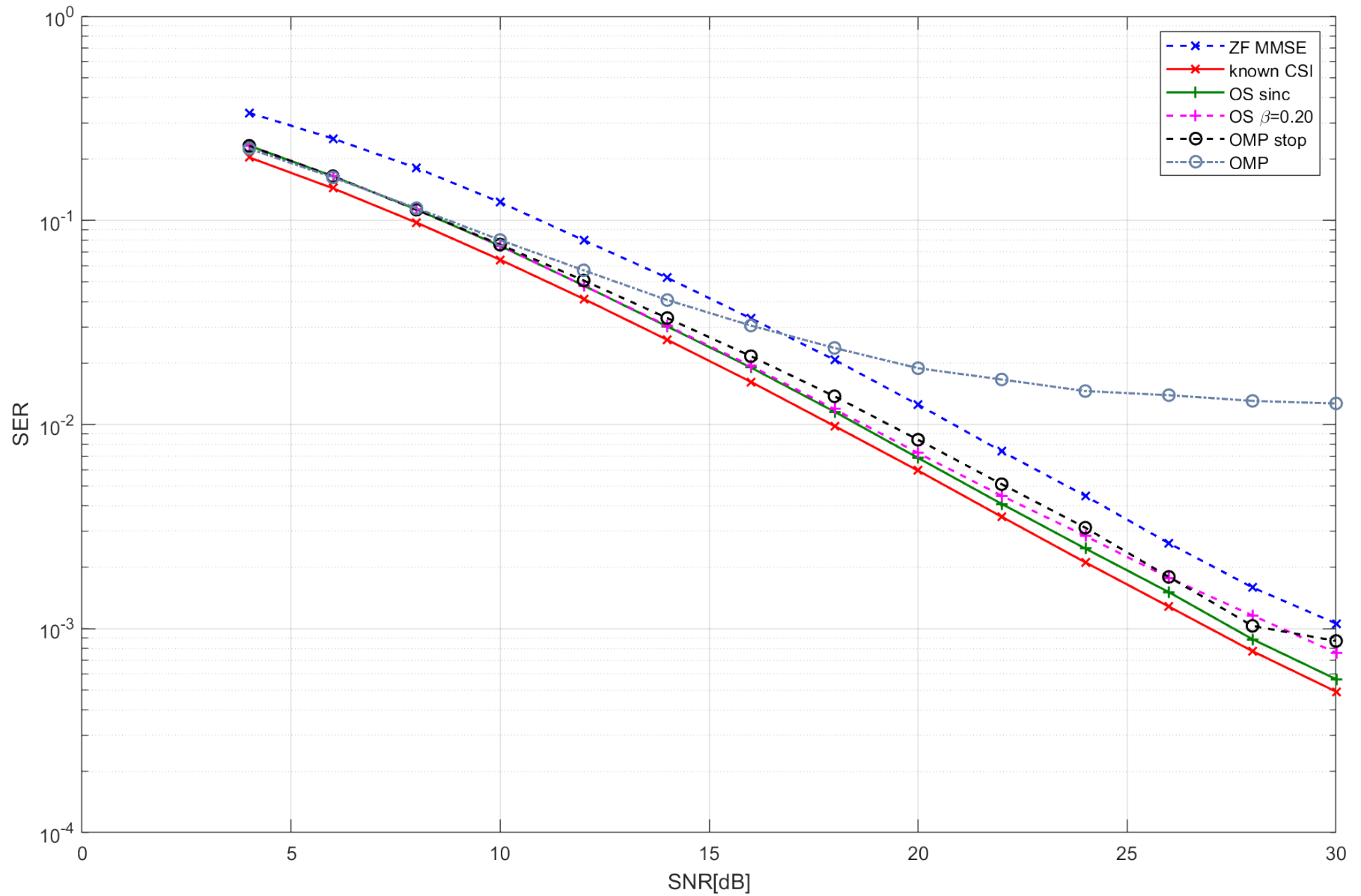
Wyniki: ścieżki poza siatką



Wyniki: filtr kształtujący



Wyniki: COST-207 (6 ścieżek)



Podsumowanie

- Nadpróbkowanie jest tylko operacją matematyczną, korektor można podmienić bez modyfikacji reszty systemu.
- Uwzględnianie sąsiadów pozwala ograniczyć współczynnik nadpróbkowania.
- Odpowiednie wartości współczynników filtru kształtującego poprawiają jakość estymacji kanału, powinien odpowiadać torowi transmisyjnemu.
- Jeżeli ścieżki są zbyt blisko siebie, to algorytm nie jest w stanie ich rozróżnić.
- Nakład obliczeniowy rośnie, ale można go ograniczyć poszerzając macierz detekcyjną tylko w wybranych fragmentach.

- Więcej szczegółów można znaleźć w:
- *Kucharczyk, M.; Dziwoki, G.; Izydorczyk, J.; Sułek, W.; Dustor, A.; Filipowski, W.; Izydorczyk, W.; Kłosowski, P.; Zawadzki, P.; Sowa, P.; and Rajzer, M. Equalizer Parameters' Adjustment Based on an Oversampled Channel Model for OFDM Modulation Systems. Electronics 2024, 13, 843.*
<https://doi.org/10.3390/electronics13050843>
- Artykuł dostępny w ramach Open Access pod adresem:
<https://www.mdpi.com/2079-9292/13/5/843>