

EFEKTYWNOŚĆ OPTIMALNYCH PORTFELI INWESTYCYJNYCH ZBUDOWANYCH NA PODSTAWIE WYKŁADNIKA HURSTA

Monika MIŚKIEWICZ-NAWROCKA¹, Katarzyna ZEUG-ŻEBRO²

¹Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach; monika.miskiewicz@ue.katowice.pl

²Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach; katarzyna.zeug-zebro@ue.katowice.pl

Streszczenie: Praca H. Markowitza *Portfolio Selection* [1952] zapoczątkowała intensywny rozwój dziedziny naukowej jaką jest analiza portfelowa. Prowadzone od wielu lat badania dostarczają nowych narzędzi oraz podejść do wyznaczania udziałów instrumentów finansowych w portfelu optymalnym, np. wskaźniki analizy fundamentalnej. Nowym podejściem zaproponowanym przez autorów jest zastosowanie do budowy portfela optymalnego wykładnika Hursta, będącego narzędziem nieliniowych układów dynamicznych. Celem artykułu jest zbudowanie oraz ocena efektywności portfeli optymalnych wyznaczonych w oparciu o wykładnik Hursta.

Słowa kluczowe: analiza portfelowa, wykładnik Hursta, szeregi czasowe.

THE EFFICIENCY OF OPTIMAL INVESTMENT PORTFOLIO BUILDING ON THE BASIS OF THE HURST EXPONENT

Abstract: The article *Portfolio Selection* by H. Markowitz [1952] started intensive development of scientific field which is a portfolio analysis. Research conducted for many years have provided new tools and approaches for estimating the shares of financial assets in the optimal portfolio. A new approach proposed by authors in the area of optimal portfolio building is the use of the Hurst exponent, which is a basis tool of nonlinear dynamic systems. The paper aims to construct and evaluate the efficiency of optimal portfolios determined based on the Hurst exponent.

Keywords: portfolio analysis, the Hurst exponent, time series.

1. Wprowadzenie

W ostatnich latach, obok klasycznych metod analizy portfelowej, rozwinęły się również nowe, alternatywne techniki dywersyfikacji portfela inwestycyjnego uwzględniające

np. taksonomiczną miarę atrakcyjności inwestycji [Tarczyński, 2002, 2013]. Nowym podejściem, zaproponowanym przez autorów jest zastosowanie wykładnika Hursta do konstrukcji portfela optymalnego. Służy on m.in. do rozróżniania szeregów losowych (przypadkowych) od szeregów losowych z obciążonym błędzeniem przypadkowym oraz identyfikacji chaosu deterministycznego w szeregach czasowych.

Celem artykułu jest próba zdywersyfikowania ryzyka portfeli inwestycyjnych zbudowanych w oparciu o wartości wykładnika Hursta oraz ocena efektywności otrzymanych portfeli na podstawie ich rzeczywistych stóp zwrotu. W badaniach pod uwagę wzięto spółki wchodzące w skład indeksu WIG 20, które w momencie budowania portfela były notowane na GPW w Warszawie przynajmniej od 10 lat. Optymalne portfele zostały zbudowane na koniec każdego roku w okresie od 1.01.2004 - 30.12.2015.

2. Wykładnik Hursta

Wykładnik Hursta H jest charakterystyką nieliniowych szeregów czasowych, która bada występowanie efektu długiej pamięci. Pozwala na rozróżnienie szeregów losowych (przypadkowych) od szeregów losowych z obciążonym błędzeniem przypadkowym. Przyjmuje wartości z przedziału $[0, 1]$. Jeśli szereg ma charakter błędzenia przypadkowego, to $H = 0,5$ (szereg losowy). Wówczas terażniejsze wartości szeregu nie mają wpływu na przyszłe. Wartość wykładnika różna od 0,5, oznacza że obserwacje nie są niezależne. Każda obserwacja przechowuje pamięć o wcześniejszych zdarzeniach. Jeżeli $0 \leq H < 0,5$ szereg jest antypersystentnym lub ergodycznym. W przypadku szeregu, dla którego $0,5 < H \leq 1$ szereg jest persystentnym, czyli wzmacniającym trend. Siła zachowań wzmacniających trend, jest tym większa im H jest bliższe jedności. Z kolei im H jest bliższe 0,5 tym wyższy poziom szumu w szeregu i tym mniej określony jest trend.

Algorytm szacowania wykładnika Hursta jest następujący [Chun S.H., Kim K.J. i in., 2002]:

Rozważmy szereg czasowy złożony z N obserwacji $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$.

1. Zamieniamy powyższy szereg obserwacji w $M = N - 1$ logarytmicznych stóp zwrotu według wzoru

$$y_k = \log\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

2. Dzielimy szereg (4.39) na m części złożonych z n elementów,

$$m = [M/n],$$

gdzie $[]$ oznacza część całkowitą argumentu.

Jeśli iloraz M/n nie jest liczbą całkowitą, to $mn < M$. W tym przypadku, w dalszej części algorytmu użyjemy wartości y_k , dla $k = 1, 2, \dots, mn$.

3. Definiujemy wartość

$$z_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_i, \quad (2)$$

gdzie y_{ij} oznacza j -tą wartość w i -tym przedziale,

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

4. Dla każdego i , ciąg sum częściowych z_{ij} wyraża się wzorem

$$u_{ij} = \sum_{j=1}^i z_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Zauważmy, że u_{ij} jest skumulowanym odchyleniem od wartości średniej dla pierwszych j wartości w przedziale i .

5. Zakres i – tego przedziału definiujemy jako

$$R_i = \max_j(u_{ij}) - \min_j(u_{ij}). \quad (4)$$

6. Unormowana wartość zakresu dla i -tego przedziału i częściowego rozmiaru n jest dana wzorem

$$\rho_{in} = R_i / S_i, \quad (5)$$

$$\text{gdzie } S_i = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_{ij}^2 \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Obliczając średnią ρ_{in} uzyskamy wynik analizy R/S

$$\rho_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \rho_{in}. \quad (7)$$

7. Następnie powtarzamy obliczenia zwiększając długość przedziału o jedną jednostkę. Iterację kontynuujemy do momentu aż n osiągnie górną granicę

$$n_{\max} = fl[(N-1)/2]. \quad (8)$$

8. Ustalając nachylenie wykresu logarytmów ρ_n do osi logarytmów n , otrzymamy wartość H .

3. Budowa optymalnych portfeli akcji

Podstawowymi charakterystykami opisującymi portfele akcji są oczekiwana stopa zwrotu portfela oraz ryzyko portfela, liczone za pomocą wzorów:

$$R_p = \sum_{i=1}^m x_i R_i, \quad (9)$$

$$S_p^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2 S_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m x_i x_j S_i S_j \rho_{ij}, \quad (10)$$

gdzie: R_p – oczekiwana stopa zwrotu portfela m akcji, S_p – ryzyko portfela m akcji, R_i – oczekiwana stopa zwrotu i -tej akcji, S_i – odchylenie standardowe akcji i -tej spółki, ρ_{ij} – współczynnik korelacji i -tej akcji z j -tą akcją, x_i – udział i -tej akcji w portfelu,

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (11)$$

m – liczba akcji w portfelu.

Udziały akcji w portfelu zazwyczaj wyznacza się w oparciu o model H. Markowitza [Markowitz, 1952], tak aby zminimalizować ryzyko tego portfela. W tym przypadku, zadanie optymalizacji jest postaci:

Zadanie 1

$$\min S_p^2, \quad (12)$$

z warunkami ograniczającymi

$$R_p \geq R_0$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

gdzie: R_0 – oczekiwana stopa zwrotu dla spółek, pozostałe oznaczenia j.w.

Propozycją autorów jest budowa portfela optymalnego w oparciu o narzędzie teorii nieliniowych układów dynamicznych – wykładnik Hursta. W tym celu należy rozwiązać następujące zadanie maksymalizacji:

Zadanie 2

$$\min S_p^2, \quad (13)$$

z warunkami ograniczającymi

$$R_p \geq R_0$$

$$\sum_{i=1}^m H_i x_i \geq H_0$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

gdzie: R_0 – oczekiwana stopa zwrotu dla spółek, pozostałe oznaczenia j.w.

Im wyższa i bliższa jedności wartość wykładnika Hursta, tym większa siła zachowań wzmacniających trend, proponuje się również rozwiązać następujące zadania optymalizacyjne:

Zadanie 3

$$\max \left(\sum_{i=1}^m H_i x_i \right), \quad (13)$$

z warunkami ograniczającymi:

$$R_p \geq R_0$$

$$\sum_{i=1}^m S_i x_i \leq S_0$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

gdzie: H_i – wykładnik Hursta dla szeregu czasowego generowanego przez ciąg notowań akcji i -tej spółki, pozostałe oznaczenia j.w.

Zadanie 4

$$\max\left(\sum_{i=1}^m H_i x_i\right), \quad (14)$$

z warunkami ograniczającymi

$$R_p \geq R_0$$

$$\sum_{i=1}^m S_i x_i \leq S_0$$

$$\sum_{i=1}^m A_i x_i \geq A_0$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

gdzie oznaczenia j.w.

Dodatkowo jako zadanie 5 w analizach pod uwagę wzięto portfele o równych udziałach akcji.

4. Badania empiryczne

W analizie empirycznej pod uwagę wzięto spółki wchodzące w skład indeksu WIG20, które w momencie budowy optymalnego portfela były notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie przynajmniej 10 lat. Optymalne portfele akcji zostały wyznaczone na koniec każdego roku w okresie 2004-2015, a zatem analizowane szeregi czasowe pochodziły z okresu 1.01.1994-30.12.2015.

W celu wyznaczenia wartości wykładnika Hursta dla analizowanych spółek pod uwagę wzięto szeregi czasowe utworzone z logarytmów dziennych stóp zwrotu cen zamknięcia w okresie 1.01.1994 - 30.12.2015. W oparciu o algorytm przedstawiony w sekcji 1 za pomocą programu GRETl oszacowano wartości wykładnika Hursta.

W kolejnym etapie badania zbudowano 60 optymalnych portfeli akcji, rozwiązując przedstawione w sekcji 2 zadania optymalizacyjne. Do obliczenia udziałów poszczególnych spółek w portfelu wykorzystano narzędzie *solver* - dodatek arkusza kalkulacyjnego *Excel*. Następnie oszacowano stopę zwrotu i ryzyko każdego portfela oraz rzeczywistą roczną stopę zwrotu. Wyniki umieszczono w tabelach 1-5. Znak „-” postawiono przy spółkach, których udział w portfelu był równy 0.

Tabela 1.

Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach będących rozwiązaniem zadania 1

Z1	2004		2005		2006		2007	
	BPH	0,1943	BPH	0,3311	BPH	0,2687	BPH	0,2426
	BZW	0,2229	BZW	0,3655	BZW	0,1864	BZW	0,4000
	DBC	0,3140	MBK	0,3033	KTY	0,2634	KGHM	-
	MBK	0,2688			MBK	0,2815	MBK	0,3574
Oczekiwana st. zwrotu	-0,000015		-0,001342		-0,001615		0,006364	
St. zwrotu	0,389148		0,380898		0,093286		-0,598796	
Wariancja	0,000081		0,000112		0,000118		0,011152	
Ryzyko	0,008985		0,010576		0,010869		0,105603	
	2008		2009		2010		2011	
	ACP	0,1785	ACP	0,1923	ACP	0,1034	ACP	0,0736
	BZW	0,1920	BZW	0,0628	BZW	0,1340	BHW	0,2032
	CERS	0,1218	CERS	0,0171	CEZ	0,1476	KGHM	0,1179
	KGHM	0,0922	CEZ	0,2170	KGHM	0,0358	KGHM	0,1179
	MBK	0,0011	KGHM	0,0344	MBK	0,0515	MBK	0,0554
	PEO	0,2501	MBK	0,0000	PEO	0,1218	PEO	0,1140
	PND	0,1632	PEO	0,2598	PKN	0,0828	PKN	0,2046
	TPSA	0,0010	PKN	-	PXM	0,1658	TPSA	0,2314
			TPSA	0,2166	TPSA	0,1573		
Oczekiwana st. zwrotu	0,031266		0,021969		0,157187		0,000910	
St. zwrotu	0,496466		0,054987		-0,041319		0,433026	
Wariancja	0,000206		0,000091		0,000043		0,000135	
Ryzyko	0,014349		0,009518		0,006593		0,011638	
	2012		2013		2014		2015	
	ACP	0,1683	ACP	0,2262	ACP	0,2366	ACP	0,2282
	BHW	0,0873	BHW	0,0297	BZW	0,0806	BZW	0,0074
	BRS	0,1050	BZW	0,1172	KGHM	0,1448	CCC	0,0556
	KGHM	0,0744	KGHM	0,0875	LPP	0,0505	EURO	0,0393
	MBK	0,1580	MBK	0,1302	MBK	0,0273	KGHM	-
	PEO	0,2604	PEO	0,2606	PEO	-	LPP	0,0686
	PKN	0,1465	PKN	0,1484	PKN	0,1030	LTS	0,0325
	TPSA	-			PKO	0,3571	MBK	0,0633
							PEO	0,3359
							PGN	0,0218
							PKN	0,1203
							PKO	0,0270
Oczekiwana st. zwrotu	-0,000455		-0,000181		0,000101		0,504960	
St. zwrotu	0,251311		0,037384		-0,223241		0,033139	
Wariancja	0,000067		0,000106		0,000066		0,000056	
Ryzyko	0,008171		0,010311		0,008145		0,007513	

Tabela 2.

Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach będących rozwiązaniem zadania 2

Z2	2004		2005		2006		2007	
	BPH	0,1943	BPH	0,3311	BPH	0,2687	BPH	0,2464
	BZW	0,2229	BZW	0,3655	BZW	0,1864	BZW	0,3771
	DBC	0,3140	MBK	0,3033	KTY	0,2634	KGHM	0,3765
	MBK	0,2688			MBK	0,2815	MBK	-
Oczekiwana st. zwrotu	-0,000015		-0,001342		-0,001615		0,006364	
St. zwrotu	0,389148		0,380898		0,093286		-0,602668	
Wariancja	0,00008		0,000112		0,000118		0,011447	
Ryzyko	0,008985		0,010576		0,010869		0,106991	
	2008		2009		2010		2011	
	ACP	0,1247	ACP	0,2700	ACP	0,1104	ACP	0,1359
	BZW	0,1752	BZW	0,0746	BZW	0,1424	BHW	0,2059
	CERS	0,1070	CERS	0,0308	CEZ	0,1863	KGHM	0,1206
	KGHM	0,1020	CEZ	0,2393	KGHM	0,0400	KGHM	0,1206
	MBK	0,0011	KGHM	0,0317	MBK	0,0563	MBK	0,0823
	PEO	0,1309	MBK	0,0000	PEO	0,1235	PEO	0,1731
	PND	0,1889	PEO	0,1732	PKN	0,0805	PKN	0,1650
	TPSA	0,1703	PKN	0,0277	PXM	0,1032	TPSA	0,1174
			TPSA	0,1527	TPSA	0,1574		
Oczekiwana st. zwrotu	0,003393		-0,000508		0,157269		0,000910	
St. zwrotu	0,531061		0,033261		-0,034586		0,404659	
Wariancja	0,000178		0,000096		0,000045		0,000144	
Ryzyko	0,013340		0,009822		0,006682		0,012008	
	2012		2013		2014		2015	
	ACP	0,1055	ACP	0,1497	ACP	0,1411	ACP	0,1698
	BHW	0,1129	BHW	0,0891	BZW	0,1103	BZW	0,0076
	BRS	0,1733	BZW	0,1499	KGHM	0,1947	CCC	0,0547
	KGHM	0,0927	KGHM	0,1727	LPP	0,0631	EURO	0,0035
	MBK	0,1794	MBK	0,1652	MBK	0,1144	KGHM	
	PEO	0,1722	PEO	0,1591	PEO	0,0000	LPP	0,0870
	PKN	0,1639	PKN	0,1144	PKN	0,1402	LTS	0,1105
					PKO	0,2362	MBK	0,1062
							PEO	0,3114
							PGN	0,0000
							PKN	0,1340
							PKO	0,0153
Oczekiwana st. zwrotu	-0,000660		-0,000181		0,000101		0,460772	
St. zwrotu	0,265760		0,027315		-0,237698		0,036268	
Wariancja	0,000072		0,000119		0,000072		0,000060	
Ryzyko	0,008485		0,010892		0,008462		0,007745	

Tabela 3.

Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach będących rozwiązaniem zadania 3

Z3	2004		2005		2006		2007	
	BPH	0.2000	BPH	0.3537	BPH	0.2807	BPH	0.247061
	BZW	0.4000	BZW	0.4000	BZW	-	BZW	0.36304
	DBC	0.4000	MBK	0.2463	KTY	0.4000	KGHM	0.3899
	MBK	-			MBK	0.3193	MBK	-
Oczekiwana st. zwrotu	0,000178		-0,001349		-0,001615		0,006364	
St. zwrotu	0,360064		0,362457		0,084759		-0,604552	
Wariancja	0,000109		0,000116		0,000147		0,011502	
Ryzyko	0,010429		0,010753		0,012124		0,107246	
	2008		2009		2010		2011	
	ACP	0.4000	ACP	0.4000	ACP	0.4000	ACP	0.4000
	BZW	0.1991	BZW	-	BZW	0.4000	BHW	0.4000
	CERS	-	CERS	0.4000	CEZ	0.0107	KGHM	-
	KGHM	-	CEZ	0.1092	KGHM	-	MBK	0.1905
	MBK	-	KGHM	0.0908	MBK	0.0785	PEO	0.0095
	PEO	-	MBK	-	PEO	-	PKN	-
	PND	0.4000	PEO	-	PKN	-	TPSA	-
	TPSA	0.0009	PKN	-	PXM	-		
			TPSA	-	TPSA	0.1108		
Oczekiwana st. zwrotu	0,004234		-0,000722		0,110813		0,001017	
St. zwrotu	0,464493		-0,041999		0,014849		0,303723	
Wariancja	0,000366		0,000362		0,000112		0,000342	
Ryzyko	0,019137		0,019016		0,010564		0,018493	
	2012		2013		2014		2015	
	ACP	0.1113	ACP	0.1402	ACP	-	ACP	-
	BHW	0.3012	BHW	-	BZW	0.2214	BZW	--
	BRS	0.1875	BZW	0.4000	KGHM	0.3786	CCC	-
	KGHM	-	KGHM	0.3853	LPP	-	EURO	-
	MBK	0.4000	MBK	0.0744	MBK	0.4000	KGHM	-
	PEO	-	PEO	-	PEO	-	LPP	-
	PKN	-	PKN	-	PKN	-	LTS	0.4000
	TPSA	-			PKO	-	MBK	0.2665
							PEO	-
							PGN	-
							PKN	0.3335
							PKO	-
Oczekiwana st. zwrotu	-0,000816		-0,000181		0,000121		0,333798	
St. zwrotu	0,492476		-0,001390		-0,341304		0,143249	
Wariancja	0,000142		0,000201		0,000156		0,000138	
Ryzyko	0,011897		0,014162		0,012506		0,011752	

Tabela 4.

Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach będących rozwiązaniem zadania 4

Z4	2004		2005		2006		2007	
	BPH	0,2000	BPH	0,3537	BPH	0,2668	BPH	0,247061
	BZW	0,4000	BZW	0,4000	BZW	0,0358	BZW	0,36304
	DBC	0,4000	MBK	0,2463	KTY	0,4000	KGHM	0,3899
	MBK	-			MBK	0,2974	MBK	-
Oczekiwana st. zwrotu	0,000178		-0,00135		-0,00161		0,006364	
St. zwrotu	0,360064		0,362457		0,081926		-0,60455	
Wariancja	0,000109		0,000116		0,000139		0,011502	
Ryzyko	0,010429		0,010753		0,011803		0,107246	
	2008		2009		2010		2011	
	ACP	0,4	ACP	0,4	ACP	0,036095	ACP	-
	BZW	0,05924	BZW	-	BZW	-	BHW	0,331972
	CERS	-	CERS	0,172958	CEZ	0,380983	KGHM	0,288501
	KGHM	-	CEZ	0,4	KGHM	0,071974	MBK	-
	MBK	0,10015	KGHM	-	MBK	0,4	PEO	0,365527
	PEO	-	MBK	0,027042	PEO	-	PKN	-
	PND	0,4	PEO	-	PKN	-	TPSA	0,014
	TPSA	0,04061	PKN	-	PXM	-		
			TPSA	-	TPSA	0,110949		
Oczekiwana st. zwrotu	0,004118		-0,000420		0,110813		0,000910	
St. zwrotu	0,341110		-0,081340		-0,117820		0,537018	
Wariancja	0,000377		0,000206		0,000117		0,000201	
Ryzyko	0,019415		0,014344		0,010827		0,014167	
	2012		2013		2014		2015	
	ACP	0,1113	ACP	0,1402	ACP	0,0605	ACP	-
	BHW	0,3012	BHW	-	BZW	-	BZW	-
	BRS	0,1875	BZW	0,4000	KGHM	0,4000	CCC	0,1685
	KGHM	-	KGHM	0,3853	LPP	0,0253	EURO	-
	MBK	0,4000	MBK	0,0744	MBK	0,4000	KGHM	-
	PEO	-	PEO	-	PEO	-	LPP	0,0991
	PKN	-	PKN	-	PKN	0,0518	LTS	-
	TPSA	-			PKO	0,0624	MBK	0,4000
							PEO	0,0459
							PGN	-
							PKN	-
							PKO	0,2866
Oczekiwana st. zwrotu	-0,00082		-0,00018		0,000101		0,333798	
St. zwrotu	0,492476		-0,00139		-0,30431		0,050065	
Wariancja	0,000142		0,000201		0,000132		0,000148	
Ryzyko	0,011897		0,014162		0,011493		0,012162	

Tabela 5.

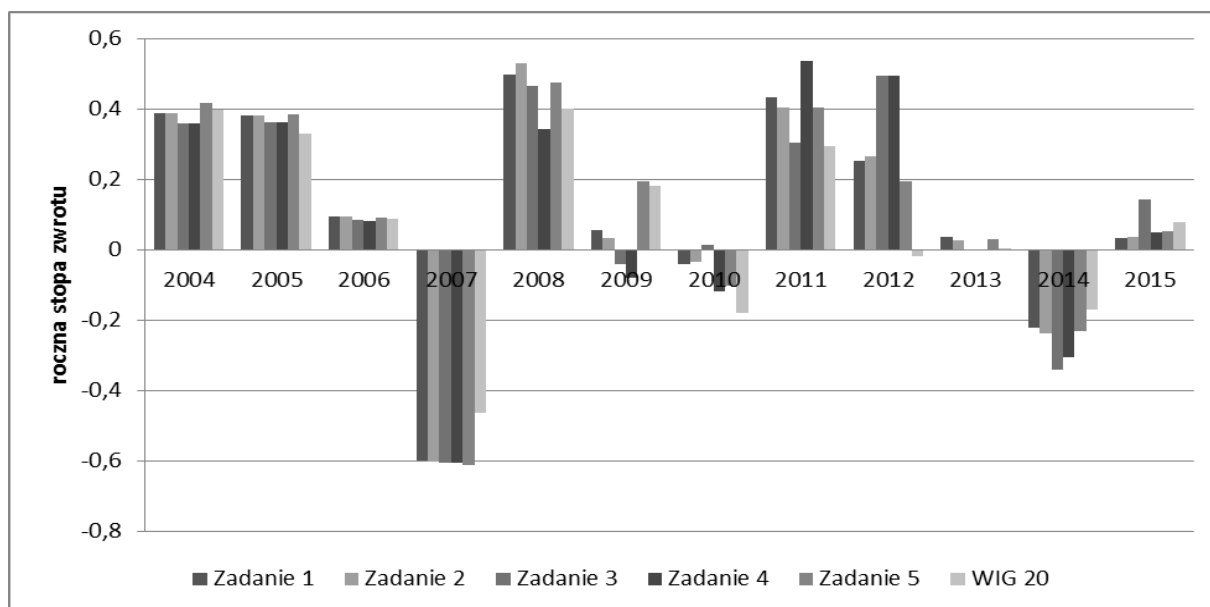
Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach będących rozwiązaniem zadania 5

Z5	2004		2005		2006		2007	
	BPH	0,2500	BPH	0,3333	BPH	0,2500	BPH	0,2500
	BZW	0,2500	BZW	0,3333	BZW	0,2500	BZW	0,2500
	DBC	0,2500	MBK	0,3333	KTY	0,2500	KGHM	0,2500
	MBK	0,2500			MBK	0,2500	MBK	0,2500
Oczekiwana st. zwrotu	-0,000152		-0,001342		-0,001615		0,006364	
St. zwrotu	0,415469		0,385048		0,090843		-0,610851	
Wariancja	0,000083		0,000112		0,000121		0,011762	
Ryzyko	0,009098		0,010601		0,011008		0,108453	
	2008		2009		2010		2011	
	ACP	0,1250	ACP	0,1111	ACP	0,1111	ACP	0,1429
	BZW	0,1250	BZW	0,1111	BZW	0,1111	BHW	0,1429
	CERS	0,1250	CERS	0,1111	CEZ	0,1111	KGHM	0,1429
	KGHM	0,1250	CEZ	0,1111	KGHM	0,1111	MBK	0,1429
	MBK	0,1250	KGHM	0,1111	MBK	0,1111	PEO	0,1429
	PEO	0,1250	MBK	0,1111	PEO	0,1111	PKN	0,1429
	PND	0,1250	PEO	0,1111	PKN	0,1111	TPSA	0,1429
	TPSA	0,1250	PKN	0,1111	PXM	0,1111		
			TPSA	0,1111	TPSA	0,1111		
Oczekiwana st. zwrotu	0,032003		0,028854		0,110813		0,000910	
St. zwrotu	0,475094		0,193602		-0,103782		0,404857	
Wariancja	0,000211		0,000162		0,000054		0,000149	
Ryzyko	0,014513		0,012712		0,007336		0,012190	
	2012		2013		2014		2015	
							ACP	0,0833
							BZW	0,0833
	ACP	0,1250	ACP	0,1429	ACP	0,1250	CCC	0,0833
	BHW	0,1250	BHW	0,1429	BZW	0,1250	EURO	0,0833
	BRS	0,1250	BZW	0,1429	KGHM	0,1250	KGHM	0,0833
	KGHM	0,1250	KGHM	0,1429	LPP	0,1250	LPP	0,0833
	MBK	0,1250	MBK	0,1429	MBK	0,1250	LTS	0,0833
	PEO	0,1250	PEO	0,1429	PEO	0,1250	MBK	0,0833
	PKN	0,1250	PKN	0,1429	PKN	0,1250	PEO	0,0833
					PKO	0,1250	PGN	0,0833
							PKN	0,0833
							PKO	0,0833
Oczekiwana st. zwrotu	-0,000816		-0,000181		0,000101		0,333798	
St. zwrotu	0,194389		0,030919		-0,232657		0,051004	
Wariancja	0,000075		0,000120		0,000078		0,000091	
Ryzyko	0,008668		0,010958		0,008829		0,009536	

Na podstawie danych przedstawionych w tabelach 1-5 można stwierdzić, że najwyższe oczekiwane stopy zwrotu R_p dla wszystkich portfeli uzyskano w roku 2015 i 2010. Portfele otrzymane w wyniku rozwiązania zadań optymalizacyjnych 1, 2 i 5 charakteryzują się największymi oczekiwanymi stopami zwrotu portfela w większości przypadków. Wyjątek stanowią lata 2004, 2011 i 2014, gdzie najwyższe stopy zwrotu odnotowano dla portfeli będących rozwiązaniem zadania optymalizacyjnego 3. Ponadto portfele będące rozwiązaniem zadań 1, 2 i 5 są obciążone najniższymi poziomami ryzyka. Najwyższe poziomy ryzyka dla

wszystkich zadań optymalizacyjnych odnotowano w 2007r., przy jednoczesnych najniższych ujemnych rzeczywistych rocznych stopach zwrotu.

Na rysunku 1 dokonano porównania rocznych stóp zwrotu zbudowanych portfeli ze stopą zwrotu indeksu giełdowego WIG20 w latach 2004-2015. Dodatkowo oszacowano skumulowane stopy zwrotu dla wszystkich portfeli oraz indeksu WIG20. Wyniki prezentuje rysunek 2.



Rysunek 1. Roczne stopy zwrotu dla wyznaczonych portfeli oraz indeksu WIG20 w latach 2004-2015.

Analizując roczne stopy zwrotu dla wyznaczonych portfeli akcji (tabele 2-6, rysunek 1) należy zauważyć, że największy zysk można było uzyskać inwestując w 2011 r. w portfel zbudowany w oparciu o maksymalizację wartości wykładnika Hursta (zadanie optymalizacyjne Z4), a następnie w 2004 r. wybierając portfel będący rozwiązaniem zadania Z2. Warto zwrócić uwagę, że w latach 2010, 2011, 2012, 2015 stopy zysku z portfeli będących rozwiązaniem zadań maksymalizacji wykładnika Hursta (Z3 i Z4) były najwyższe. Na podstawie danych zawrtych na rysunku 1 można zauważyć, że prawie w każdym roku oszacowane portfele optymalne dają wyższe stopy zwrotu niż indeks WIG 20. Wyjątek stanowi rok 2007 i 2014, gdzie uzyskano ujemne stopy zwrotu dla każdego z portfeli.



Rysunek 2. Skumulowane stopy zwrotu dla wyznaczonych portfeli oraz indeksu WIG20 w latach 2004-2015.

Na podstawie danych zawartych na rysunku 2 można zauważyć, że proponowane podejścia wyznaczania portfeli optymalnych oparte na wykładniku Hursta lepsze rezultaty dają na rynku byka (2004-2006, 2009-2014) niż na rynku niedźwiedzia (2008, 2015). Oszacowane 10-letnie stopy zwrotu dla rozpatrywanych strategii pokazały, że najbardziej opłacalne okazało się inwestowanie w portfel będący rozwiązaniem zadania Z1 (0,9011), następnie Z2 (0,8363) i Z5 (0,8320). Najgorsze w długim terminie okazały się strategie inwestycyjne oparte na zadaniu optymalizacyjnym Z3 i Z4, dla których 10-letnie stopy zwrotu wyniosły odpowiednio 0,6561 i 0,4420. W tym okresie stopa zwrotu z indeksu WIG20 wyniosła 0,6813.

5. Podsumowanie

Zastosowanie narzędzia nieliniowych układów dynamicznych, jakim jest wykładnik Hursta, wydaje się ważnym elementem badań dotyczących analizy portfelowej. Przeprowadzone badania pokazały, że zadania optymalizacji oparte na wykładniku Hursta dają lepsze lub tak samo dobre wyniki jak inne klasyczne metod. Warto zatem przeprowadzić dodatkowe badania analizujące wpływ zastosowania innych miar teorii nieliniowych układów dynamicznych na konstrukcję portfeli optymalnych.

Bibliografia

1. Devaney, R.L. (1987). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Redwood City: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
2. Eckmann, J.P., Ruelle, D. (1985). Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, 57, no. 3.
3. Kantz, H., Schreiber, T. (2004). *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press (second edition).
4. Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance*, p.77-91.
5. Nowiński, M. (2007). *Nieliniowa dynamika szeregów czasowych*. Wrocław: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu.
6. Tarczyński W. (2013). Ocena efektywności metod analizy portfelowej na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie za lata 2001-2013. Szczecin: *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego nr 761, Finanse, rynki finansowe, ubezpieczenia*, nr 60, 537-550.
7. Tarczyński, W. (2002). *Fundamentalny portfel papierów wartościowych*. Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.
8. Zawadzki, H. (1996). *Chaotyczne systemy dynamiczne. Elementy teorii i wybrane zagadnienia ekonomiczne*. Katowice: Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach.