

# Spis treści

Wstęp	7
<b>1 Całkowanie przez części – podejście algorytmiczne</b>	<b>9</b>
1.1 Wprowadzenie	9
1.1.1 Uwagi techniczne	11
1.2 Całkowanie przez części wybranych całek, należących do drugiego zbioru	12
1.3 Uwagi o innych, istotnych (w tym alternatywnych) metodach oraz przykładach całkowania przez części	15
1.3.1 Całkowanie przez części całek oznaczonych	21
1.3.2 Twierdzenie o całkowaniu przez części dla całki Lebesgue’a (wzór Dirichleta)	25
1.3.3 Twierdzenia o całkowaniu przez części dla całki Henstocka-Kurzweila	27
1.3.4 Przekształcenie Abela	31
Uwaga 13 – ciągi słabo monotoniczne według L. Leindlera oraz wersja kryterium Schlömilcha (zobacz twierdzenie 7 z dowodem)	35
1.3.4.1 Twierdzenia Kałużnego	39
1.3.5 Twierdzenia odwrotne do kryteriów Dirichleta i Abela dla szeregów liczbowych	42
1.3.6 Wersja szeregowo-całkowa wzoru Abela	46
1.3.7 Kryteria Dirichleta i Abela zbieżności całek niewłaściwych	47
1.3.8 Kryteria Dirichleta i Abela zbieżności jednostajnej całek niewłaściwych zależnych od parametru	50
1.4 Zestaw wybranych zadań do ćwiczenia techniki całkowania przez części	53
zadanie 14° – stała lemniskaty i całka lemniskaty	59
zadanie 19° – całki Fritsa Beukersa	64
zadanie 26° – twierdzenie Abela o przejściu granicznym	68
zadanie 29° – nierówność Fejera	74
zadanie 30° – nierówność Karamaty	81

	zadanie 31° – wzór całkowy i zależność rekursywna dla liczb Catalana . . . . .	81
1.5	Rozwiązania i wskazówki . . . . .	82
<b>2</b>	<b>Całkowanie z wykorzystaniem równań funkcyjnych</b>	<b>109</b>
2.1	Całka związana z całką Gaussa . . . . .	109
2.2	Pewne całki Eulera . . . . .	114
2.3	Zadania . . . . .	116
	zadanie 5° – o miarach gaussowskich . . . . .	119
2.4	Rozwiązania i wskazówki . . . . .	121
<b>3</b>	<b>Twierdzenie o całce iterowanej niewłaściwej</b>	<b>135</b>
3.1	Pewna wersja twierdzenia Fubniego . . . . .	135
3.2	Całki Frullaniego . . . . .	139
3.3	Przykłady zastosowania twierdzeń 28–31 . . . . .	144
3.4	Zadania do samodzielnego rozwiązania . . . . .	146
3.5	Całki Fresnela . . . . .	148
	uwaga 43 – wzór Borosa i Molla . . . . .	150
	uwaga 44 – odkrycie Erika Talvili . . . . .	151
	uwaga 45 – spiralna Cornu . . . . .	152
<b>4</b>	<b>Reguła de l’Hospitala</b>	<b>157</b>
4.1	Rys historyczny . . . . .	157
4.2	Współczesne dowody reguły de l’Hospitala . . . . .	159
	4.2.1 Dowód z zastosowaniem całki Riemanna . . . . .	160
	4.2.2 Dowód Kolihi . . . . .	161
4.3	Kontrprzykłady do reguły de l’Hospitala . . . . .	162
	4.3.1 Wprowadzenie . . . . .	162
	4.3.2 Konstrukcja kontrprzykładu . . . . .	163
	4.3.3 Dyskusja błędu . . . . .	163
4.4	Uogólnienia klasycznej reguły de l’Hospitala . . . . .	164
	4.4.1 Reguła de l’Hospitala w sformułowaniu Lesława Gajka . . . . .	164
	4.4.2 Twierdzenia Vybornego-Nestera . . . . .	168
	4.4.3 Kontrprzykład . . . . .	171
	4.4.4 Twierdzenia Gabora Szabó . . . . .	172
	4.4.5 Twierdzenie Benedettiego . . . . .	175
	4.4.6 Monotoniczna reguła de l’Hospitala . . . . .	176
	4.4.7 Dyskretna wersja reguły de l’Hospitala, czyli twierdzenie Stolza-Cesàro . . . . .	178
	4.4.8 Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Stolza-Cesàro . . . . .	179
	4.4.9 Dyskretna wersja twierdzenia Gajka . . . . .	181
	4.4.10 Twierdzenie Stolza-Cesàro dla ciągów zespolonych . . . . .	185
4.5	Problemy ogólne . . . . .	189
	zadanie 7° – operator różnicy progresywnej . . . . .	191
	zadanie 9° – nierówności Wilkera-Anglesio . . . . .	195

zadanie 10° – nierówność Beckera-Starka . . . . .	195
zadanie 11° – wariacje nierówności Jordana . . . . .	196
zadanie 15° – twierdzenia o asymptotyce ciągu . . . . .	199
4.6 Rozwiązania i wskazówki . . . . .	202
4.7 Przykłady wyznaczania wybranych granic na podstawie reguły de l'Hospitala . . . . .	220
4.7.1 Granice podstawowe . . . . .	220
4.7.2 Granice trudniejsze . . . . .	220
4.8 Rozwiązania . . . . .	223
4.9 Reguła de l'Hospitala dla granic wielu zmiennych . . . . .	237
Bibliografia . . . . .	241